Ministère de l'éducation nationale

Session 2015

PE2-15-2-PG1
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mercredi 29 avril 2015 – de 9h00 à 13h00
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1 à 9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE : PROBLÈME

13 POINTS

Dans tout le problème on travaille dans un réseau pointé à maille carrée.
On notera une unité de longueur 1 *u.l.* et une unité d'aire 1 *u.a.*

On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.

L'objet de ce problème est le calcul d'aires de polygones de Pick.

A. Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Calculer l'aire du polygone ABCDEF (*figure 1*), en unité d'aire. Expliciter les étapes du raisonnement.

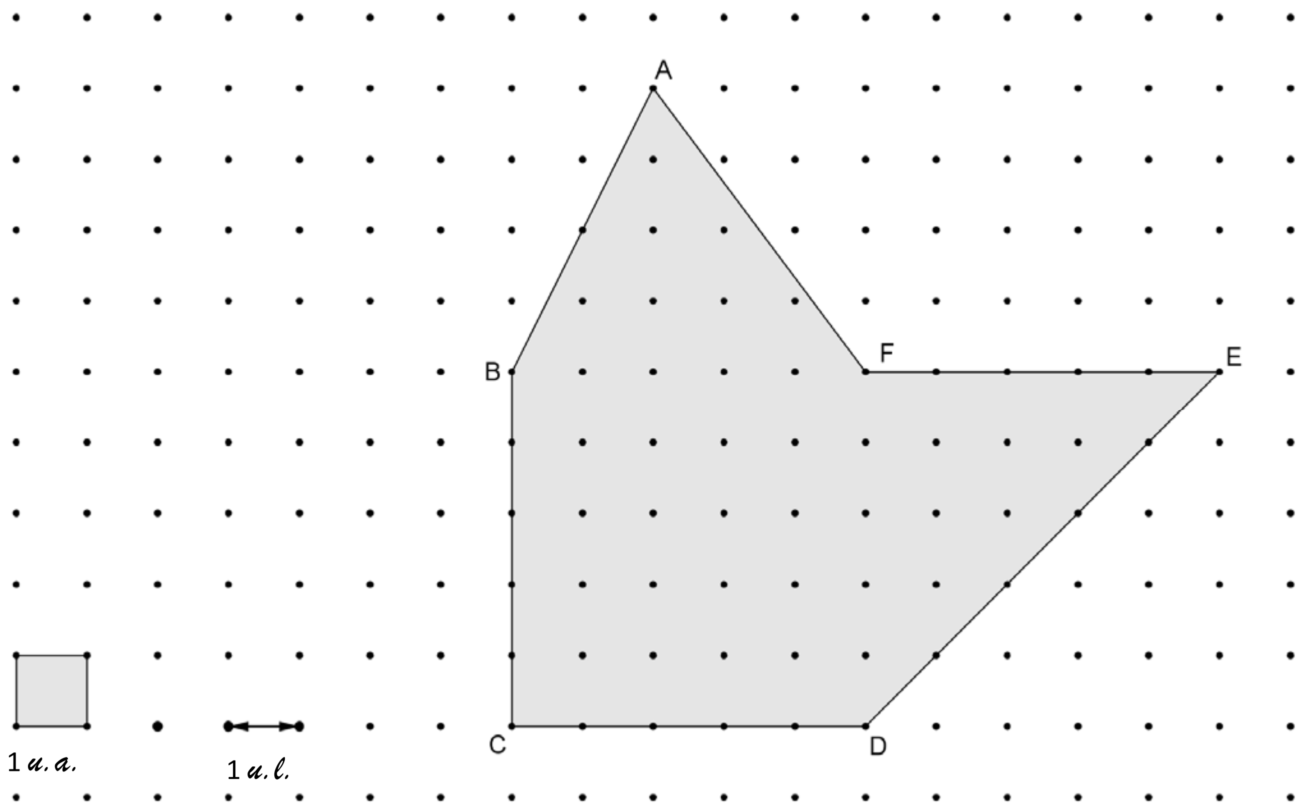


figure 1

Une formule trouvée sur Internet sous le nom de formule de Pick prétend permettre de calculer l'aire $\mathscr{A}$ d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone :

$$\boxed{\mathscr{A} = i + \frac{b}{2} - 1}$$

Le résultat est en unité d'aire avec 1 *u.a* = aire d'un carré unité.
Par exemple, pour le polygone ci-dessous :

$i = 15$ et $b = 16$, donc, en utilisant la formule, $\mathscr{A} = 15 + \frac{16}{2} - 1 = 22$.

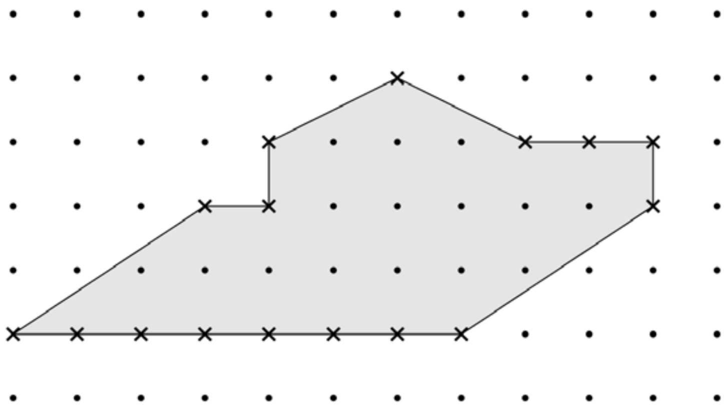


figure 2

B. Utilisation de la formule de Pick sur un exemple.

1. Appliquer cette formule au polygone ABCDEF de la *figure 1* et vérifier que l'on retrouve bien son aire.

2. Propriété d'additivité des aires.
Appliquer la formule de Pick aux deux polygones de Pick ABCDF et DEF de la *figure 1*.
Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question **B.1.**

Les parties **C.** et **D.** sont indépendantes.

C. Quelques conséquences de la formule de Pick.

Dans cette partie du problème, on admet que la formule est vraie dans le cas général.

1. Prouver qu'il ne peut pas y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.

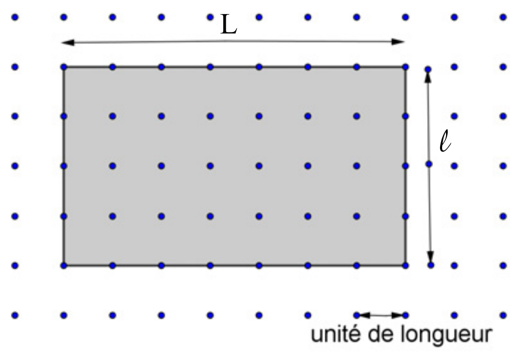
2. On considère un polygone de Pick d'aire 7,5. Démontrer que la valeur maximale que peut prendre b est 17.
Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick correspondant à cette valeur.

3. On veut tracer un polygone de Pick d'aire 7,5 et contenant un seul point intérieur.
Quelle est alors la valeur de b ?
Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick d'aire 7,5 vérifiant ces conditions.

4. Démontrer que le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire $\mathscr{A}$ quelconque est : $2\,\mathscr{A} + 2$.

D. Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle.

On considère un rectangle de Pick de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans l'exemple ci-dessous).
On note : L sa longueur
ℓ sa largeur
i le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle
b le nombre de points sur le bord du rectangle



1. Exprimer b et i en fonction de L et ℓ.

2. En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ du rectangle vérifie $\mathscr{A} = i + \frac{b}{2} - 1$.

DEUXIÈME PARTIE

13 POINTS

Cette partie est constituée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :

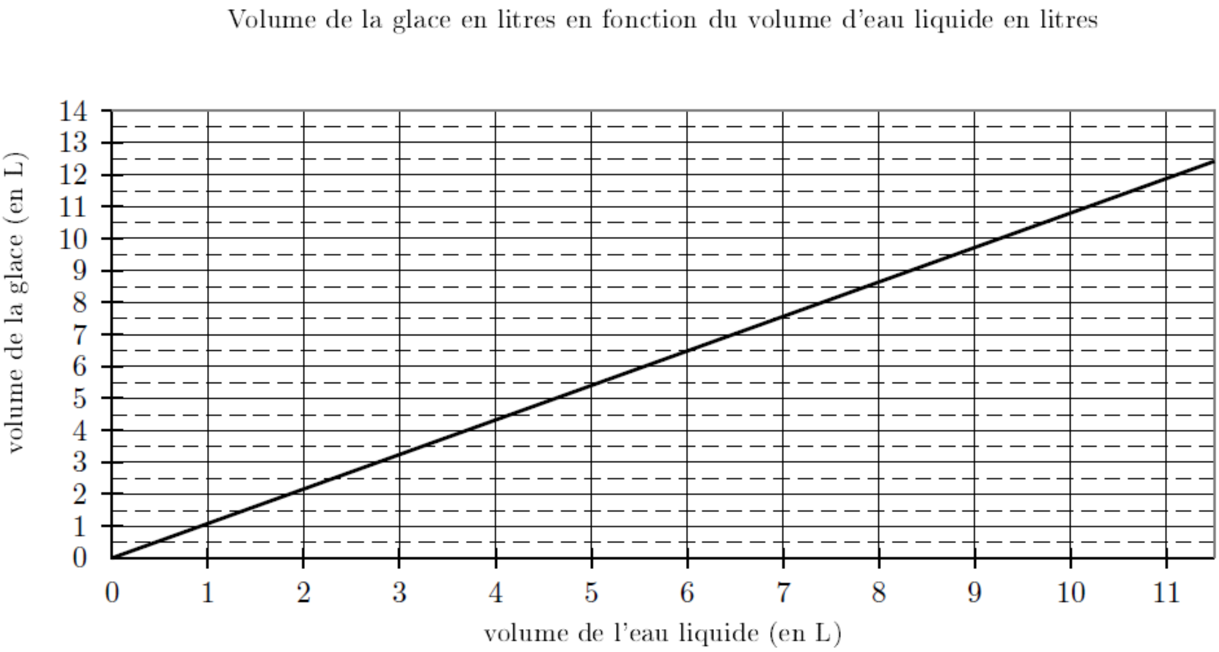
- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- A – B est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Trouver toutes les valeurs possibles pour A et B.

EXERCICE 2

(D'après le sujet du DNB Métropole 2010)

L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litre), en fonction du volume d'eau liquide (en litre).



On répondra aux questions **1.**, **2.** *et* **3.** *en utilisant le graphique ci-dessus.*

1. Quel est le volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide ?

2. Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace ?

3. Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier votre réponse.

4. On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?

5. Dans un souci de préservation de la ressource en eau, la ville de Lyon a imaginé un dispositif de recyclage. Cette ville fournit un volume de 20 m^3 d'eau par jour aux engins de nettoiement grâce à l'eau récupérée de la fonte de la glace de la patinoire de Baraban.

   A combien de litres de glace correspond le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage ?

   (source : article du 03/12/2013 - http://blogs.grandlyon.com).

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on prendra 1 cm comme unité de longueur.

On considère un trapèze ABFE rectangle en A et B, c'est-à-dire tel que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite (AB), et tel que AB = 14 ; AE = 3 ; BF = 9.
Le point M est un point variable sur le segment [AB]. Le but de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la valeur de EM + MF est minimale.

1. Construire le trapèze ABFE et le point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).
2. On appelle P l'intersection des droites (AB) et (EG).
   Montrer que pour tout point M de [AB], on a : $EM + MG \geq EP + PG$.
   En déduire que la valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P.
3. a) Montrer que $\frac{AP}{14 - AP} = \frac{3}{9}$.

   b) Calculer AP.
4. Calculer la valeur minimale de EM + MF. En donner la valeur exacte en cm, et la valeur arrondie au dixième.

TROISIÈME PARTIE

14 POINTS

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

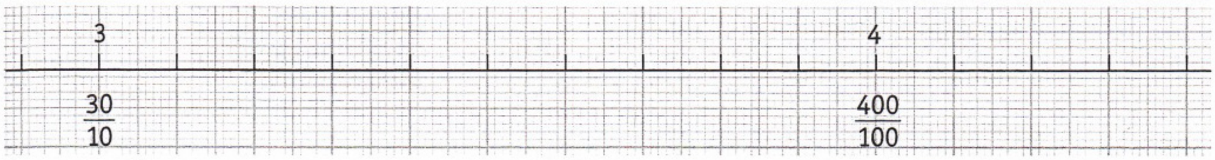
SITUATION 1 : Extrait du manuel « Outils pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011)


2 * **a.** Associe ces fractions aux lettres sur la droite : $\frac{50}{100}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{120}{100}$ $\frac{134}{100}$ $\frac{85}{100}$

b. Écris chaque fraction sous la forme d'un nombre décimal.

3 ** **Reproduis cette droite sur du papier millimétré et place :**

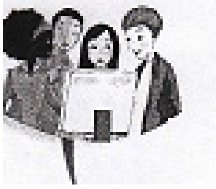
$\frac{300}{100}$ $\frac{40}{10}$ 3,6 3,75 $\frac{29}{10}$ 3,96 4,3 $\frac{326}{100}$



1. Un élève a bien réussi la question ❷ mais a fait plusieurs erreurs à la question ❸. En comparant la présentation et les tâches demandées dans ces deux questions, donner trois raisons pouvant expliquer cette différence de réussite.
2. Quelle définition d'un nombre décimal peut-on proposer à l'école élémentaire ?

SITUATION 2 : Extrait du manuel scolaire « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010)

Labo Maths



Fatou dit qu'elle a réussi à tracer un segment dont la mesure en décimètres est comprise entre $2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}$ et $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100}$.

Max lui dit que ce n'est pas possible, car $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{2}{100}$.

Qui a tort ? Expliquez pourquoi.

Trois copies d'élèves sont proposées ci-après (Lara, Clément et Léonie).

1. Quelles sont les erreurs faites par Lara ? Indiquer pour chacune une origine possible.
2. Citer une compétence qui semble acquise dans le domaine de la numération pour Clément.

3. Léonie s'appuie sur les écritures décimales des nombres $2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}$ et $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100}$ pour comparer ces nombres. Énoncer la règle de comparaison qu'elle utilise implicitement.

Copies d'élèves :

Lara

Lara

$2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}=\frac{252}{1000}=0{,}252=252$

$2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100}=\frac{261}{1000}=0{,}261=261$

Max a tort car 252 est plus petit que 261.
Fatou a raison

Clément

Clément

$2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}=2{,}52$ $\qquad$ $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100}=2{,}61$

2,52 – 2,61 = IMPOSSIBLE

Fatou a tort parce que nous ne pouvons pas le calcul

Léonie

$2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}=2{,}52$ et $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100}=2{,}61$ Léonie

$\frac{5}{10}=0{,}5$ $\quad$ $\frac{2}{100}=0{,}02$ $\qquad$ $\frac{6}{10}=0{,}6$ $\quad$ $\frac{1}{100}=0{,}01$

Fatou dit que le segment qu'il a fait est entre 2,52 et 2,61.
C'est Max qui a tort car $\frac{1}{100}=0{,}01$ et $\frac{2}{100}=0{,}02$ mais le chiffre d'avant pour $\frac{2}{100}$ est 2,52 est pour $\frac{1}{100}$ c'est 2,61
c'est le chiffre des dixièmes qui a permis à Fatou. Alors que Max a comparer au chiffres des centièmes

SITUATION 3 :

La situation suivante composée de trois problèmes a été proposée à des élèves. *(d'après ERMEL CM2, Hatier)*

P1 : Avec une bouteille de 150 cL de jus de fruits, combien peut-on remplir de verres de 8 cL ?

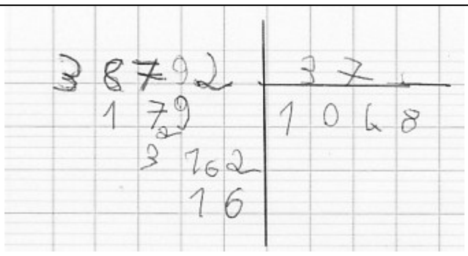
P2 : Olivier achète 8 CD de même prix pour 150 €. Quel est le prix d'un CD ?

P3 : À la cantine, les enfants déjeunent par tables de 8. Aujourd'hui 150 enfants déjeunent à la cantine. Combien de tables faut-il préparer ? Restera-t-il des places vides ?

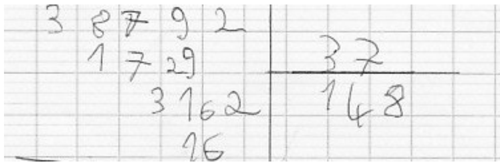
1. Ces trois problèmes relèvent de la division. Indiquer ce qui les différencie.
2. Donner l'ordre dans lequel ces exercices pourraient être proposés aux élèves. Justifier.

SITUATION 4 : Technique opératoire de la division

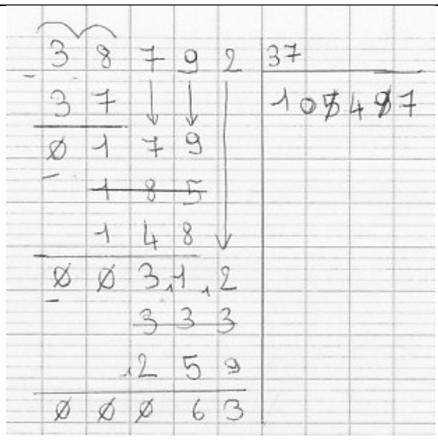
Voici les productions de quatre élèves.



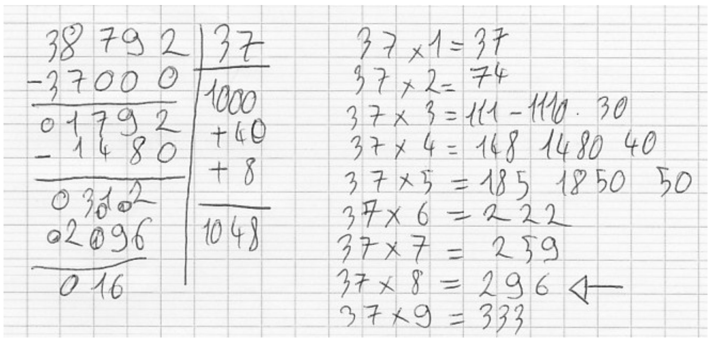
Adama



Marie



Kévin



Anaïs

1. Donner un avantage de chacune des techniques opératoires utilisées par Adama et Anaïs.
2. Relever les erreurs faites par Marie et Kévin et, pour chacune, émettre une hypothèse sur son origine.