

Session 2015

PE2-15-2-PG2

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mercredi 29 avril 2015 – de 9h00 à 13h00
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques

Durée : 4 heures
Épreuve notée sur 40

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une **note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

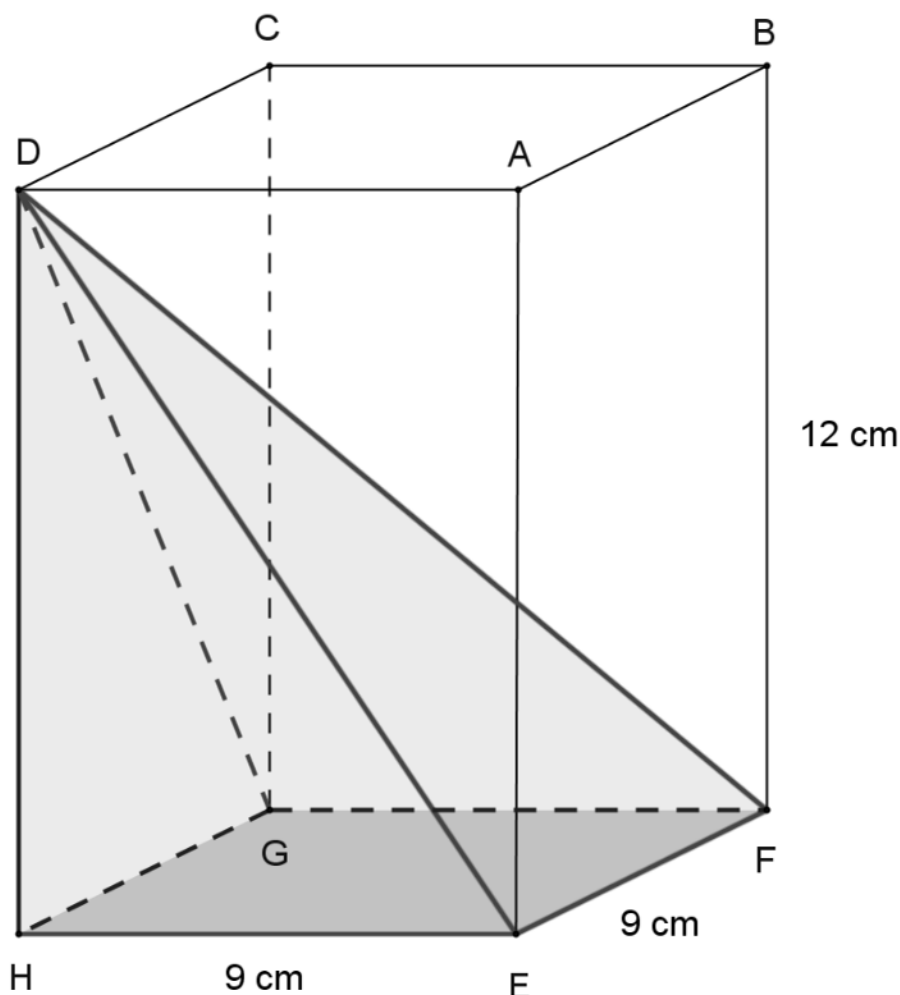
PREMIÈRE PARTIE

13 POINTS

L'objet de ce problème est l'étude d'une pyramide en verre, destinée à être remplie de sable pour constituer un objet de décoration.

Cette pyramide est inscriptible dans un pavé droit, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Le pavé droit a pour dimensions : 9 cm de longueur, 9 cm de largeur et 12 cm de hauteur.



Les parties B. et C. sont indépendantes de la partie A.

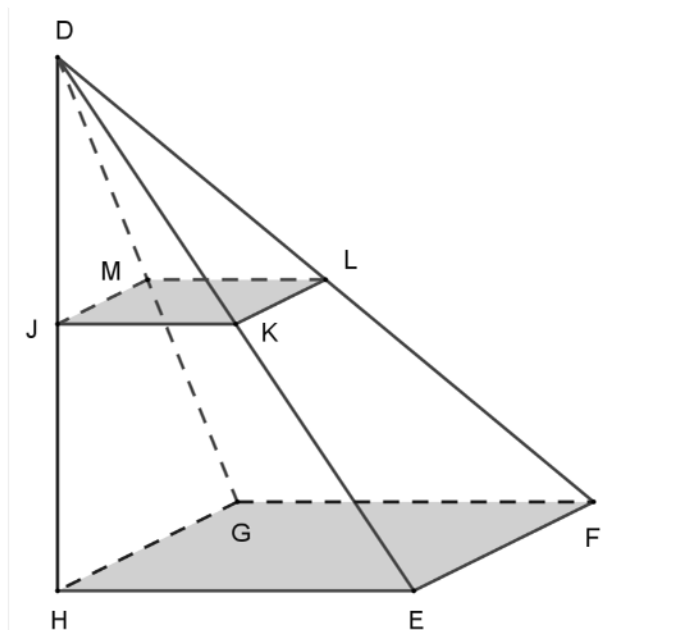
A. Réalisation d'un patron de la pyramide

- a) Calculer les longueurs DE et DG.
b) Quelle est la nature du triangle DGF ? Du triangle DEF ? (On ne demande pas de justification.)
2. Tracer sur la copie (sans justification) un patron de cette pyramide à l'échelle $1/3$.

La pyramide est remplie avec du sable de deux couleurs différentes : la partie inférieure avec du sable rouge et la partie supérieure avec du sable blanc.

Sur la figure ci-dessous, le point J indique la hauteur à laquelle s'arrête le sable rouge ; les deux couleurs de sable sont délimitées par le plan parallèle à la base de la pyramide DEFGH passant par le point J. La section est un quadrilatère JKLM où les points K, L, M appartiennent respectivement aux segments [DE], [DF] et [DG].

La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH.



B. Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on donne $JH = 2$ cm.

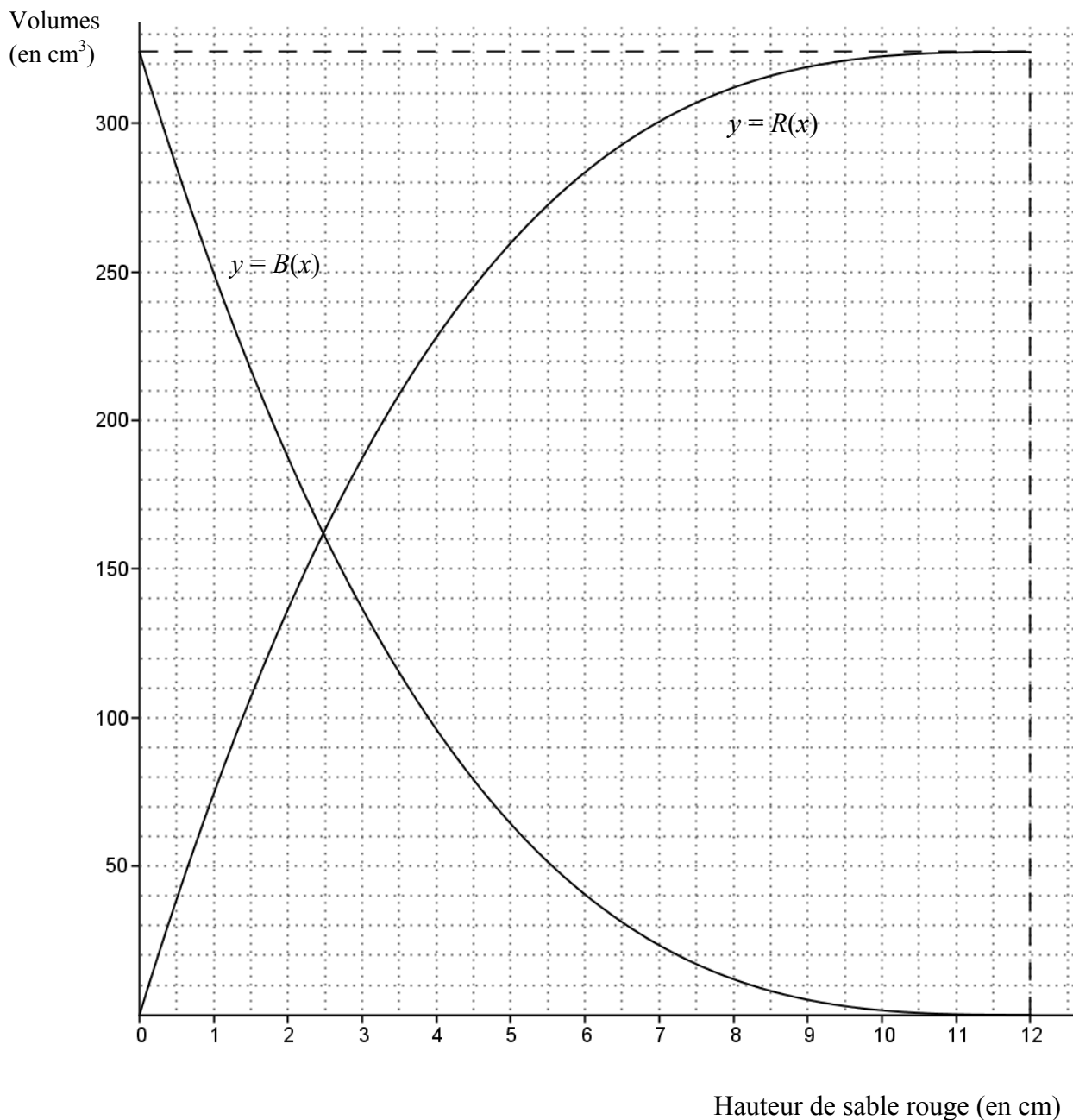
1. Quelle est la nature du quadrilatère JKLM ? Justifier.
2. Calculer les longueurs JK et JM en justifiant les calculs.
3. Déterminer le volume B de sable blanc et le volume R de sable rouge contenus dans la pyramide.

<i>Rappel</i> : volume d'une pyramide $= \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

C. Étude du cas général

Dans cette partie la hauteur JH de sable rouge est variable. On note x cette hauteur, exprimée en centimètre, et respectivement $B(x)$ et $R(x)$ les volumes de sable blanc et de sable rouge contenus dans la pyramide, exprimés en fonction de x et en centimètre cube.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On a tracé ci-après les représentations graphiques des fonctions B et R dans un repère du plan :



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

- a) Si la hauteur de sable rouge est 5 cm, quels sont les volumes respectifs de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide ?
 - b) Si la hauteur de sable blanc est 5 cm, quels sont les volumes de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide ?
 - c) Donner un encadrement au centimètre près de la hauteur de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux.
3. a) Montrer que $B(x) = 0,1875(12 - x)^3$.
- b) En déduire les valeurs exactes des réponses aux questions C.2.a).

DEUXIÈME PARTIE

13 POINTS

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

D'après le manuel « Triangles 3^{ème} » (éditions Hatier)

Carole, partie en vacances 10 jours, a laissé le robinet du lavabo de la salle de bain entrouvert. Le débit de ce robinet était 3 litres par minute (L/min).

Dans la ville où habite Carole, le prix moyen de l'eau est 3,50 € le m³.

Calculer les conséquences financières de la négligence de Carole.

EXERCICE 2

Simon lance deux dés équilibrés à six faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, puis il additionne les deux nombres obtenus. Il prétend qu'il a autant de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Est-ce exact ?

EXERCICE 3

Une petite entreprise emploie 7 personnes, dont 3 femmes.

Voici quelques informations sur le salaire mensuel des personnels :

Salaires des hommes :

1250 € ; 1400 € ; 1600 € ; 3200 €

Salaires des femmes :

salaire médian : 1875 € ; salaire moyen: 1700 € ; étendue des salaires : 1000 €

Le patron de l'entreprise veut embaucher une femme supplémentaire pour respecter la parité.

Calculer le salaire qu'il doit verser à cette nouvelle recrue pour que les salaires moyens des hommes et des femmes soient égaux.

EXERCICE 4

Un fleuriste reçoit 12 tulipes et 18 roses pour faire des bouquets. Il souhaite utiliser toutes ses fleurs et composer des bouquets identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes). Quelles sont ses différentes possibilités ?

TROISIÈME PARTIE

14 POINTS

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 en activité de recherche.

Dans une plaque de carton rectangulaire de largeur 50 cm et de longueur 60 cm, on découpe un rectangle dont la largeur est $\frac{3}{5}$ de la largeur de la plaque et la longueur est $\frac{3}{4}$ de la longueur de la plaque.

Calcule le périmètre et l'aire du rectangle obtenu.

1. Dans cet exercice, les fractions apparaissent-elles comme des nombres ou comme des opérateurs ? justifier.
2. Le problème a été proposé à trois élèves, dont les productions sont données ci-dessous :

Éva

$$60 = 15 + 15 + 15 + 15$$

$$\frac{3}{4} = 45$$

la longueur est 45

$$50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$$

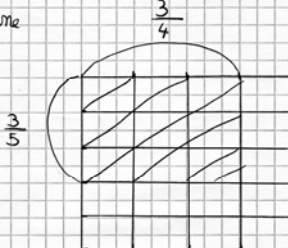
$$\frac{3}{5} = 30$$

la largeur est 30

$$\begin{array}{r} 45 \\ + 30 \\ \hline 75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 75 \\ \times 2 \\ \hline 150 \end{array} \quad \text{le périmètre est } 140$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 30 \\ \hline 00 \\ 1350 \\ \hline 1350 \end{array} \quad \text{l'aire est } 1350$$

Jeanne



le périmètre est 12
l'aire est 9

Maxime

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 3,5 \\ \hline 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69 \\ \times 2 \\ \hline 138 \end{array}$$

le périmètre est 138 cm.

$$\begin{array}{r} \times 34 \\ 3,5 \\ \hline 1020 \\ 1190 \\ \hline 1190 \end{array} \quad \text{l'aire est } 1190 \text{ cm}^2$$

- a) Pour chacun de ces trois élèves, donner deux compétences qui semblent acquises dans le domaine grandeurs et mesures.
 - b) Analyse de la production d'Eva : en quoi témoigne-t-elle d'une bonne compréhension de la notion de fraction malgré une erreur d'écriture ?
 - c) Analyse de la production de Maxime : en quoi son erreur d'écriture est-elle révélatrice d'une mauvaise compréhension de la notion de fraction ?
3. En préparant cette activité, le professeur a hésité entre trois couples de dimensions pour le rectangle de carton :
- 50 cm de largeur et 60 cm de longueur (dimensions finalement retenues) ;
 - 10 cm de largeur et 16 cm de longueur ;
 - 10 cm de largeur et 14 cm de longueur.
- Argumenter l'intérêt et les difficultés éventuelles pour chacune de ces options.

SITUATION 2

L'exercice ci-dessous est proposé à des élèves d'une classe de CM2.



(Extrait de « Vivre les maths CM2, Nathan, Programme 2008 »).

1. Citer deux pré-requis dans le domaine de la géométrie nécessaires pour résoudre cet exercice.
2. Un élève propose la solution suivante :

$$\begin{aligned}
 120 - 28 &= 92 \\
 2 \times 18 &= 36 \\
 2 \times 10 &= 20 \\
 36 + 20 &= 56 \\
 92 - 56 &= 36 \div 2 = 18 \\
 \text{La hauteur de la boîte est de 18 cm.}
 \end{aligned}$$

- a) Retrouver les différentes étapes de son raisonnement, en analysant ses résultats partiels.
- b) Relever ses éventuelles erreurs ou oublis.

SITUATION 3



Lis le problème.

Emma et Maxime vendent des crêpes pour la kermesse de l'école.

5 crêpes coûtent 7 €.

10 crêpes coûtent donc 14 €.

Combien coûtent 15 crêpes ?

(Extrait de « *Vivre les maths CM2, Nathan, Programme 2008* »).

1. Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?
2. Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune, expliciter les propriétés relatives à cette notion qui ont été mobilisées.