

❧ Baccalauréat ES/L Amérique du Sud ❧  
21 novembre 2013

A. P. M. E. P.

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.

**Affirmation 1** : « Diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à diminuer ce budget de 30 % sur la période de 5 ans ».

2. La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction  $B$  définie sur l'intervalle  $[0; 10]$  par

$$B(x) = -x^2 + 10x - 9,$$

où  $x$  représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.

**Affirmation 2a** : « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB, le bénéfice est positif ».

**Affirmation 2b** : « Lorsque l'entreprise produit et vend 5 000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal ».

**Affirmation 2c** : « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 et 8 000 clés USB, son bénéfice mensuel moyen est égal à 78 000 euros ».

3. Pour contrôler la qualité du stock formé des milliers de clés USB fabriquées chaque année, on sélectionne au hasard un échantillon de 4 000 clés. Parmi ces clés, 210 sont défectueuses.

Le directeur des ventes doit stopper toute la chaîne de fabrication des clés USB si la borne supérieure de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, dépasse 7 %.

**Affirmation 3** : « À l'issue du contrôle, le directeur des ventes stoppera toute la chaîne de fabrication ».

**EXERCICE 2**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{-x} + 1.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé du plan et  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

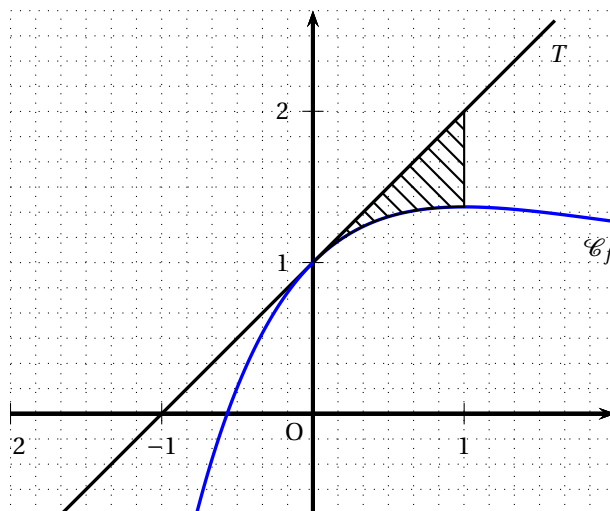
1. a. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ .

- b. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[-1; 0]$ .
- b. Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est  $y = x + 1$ .
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $T$ .

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel  $x$ , l'expression et le signe de  $f''(x)$  où  $f''$  désigne la dérivée seconde de  $f$ .

|   | Instruction                             | Réponse         |
|---|---|-----------------|
| 1 | $f(x) = x * \exp(-x) + 1$               | $xe^{-x} + 1$   |
| 2 | $f''(x) = \text{dérivée seconde}[f(x)]$ | $e^{-x}(x - 2)$ |
| 3 | résoudre $[e^{-x}(x - 2) \geq 0]$       | $x \geq 2$      |

- a. Déterminer le sens de variation de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Déterminer l'intervalle de  $\mathbb{R}$  sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.
- c. En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $T$  sur l'intervalle  $]-\infty; 2]$ .
5. On a tracé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la tangente  $T$  dans un repère ortho-normé.



- a. On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = e^{-x}(-1 - x) + x.$$

Montrer que  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- b. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la tangente  $T$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$  puis donner le résultat arrondi à  $10^{-3}$  près.

### EXERCICE 3

5 points

ES : Enseignement obligatoire

L : Enseignement de spécialité

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une

opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

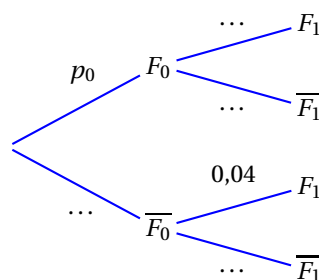
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- $F_0$  l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité  $p_0$  et  $\overline{F_0}$  son évènement contraire ;
- $F_1$  l'évènement « la personne interrogée le 1<sup>er</sup> mois a une opinion favorable » de probabilité  $p_1$  et  $\overline{F_1}$  son évènement contraire.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



b. Montrer que  $p_1 = 0,9p_0 + 0,04$ .

Pour la suite de l'exercice, on donne  $p_0 = 0,55$  et on note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_n$  l'évènement « la personne interrogée le  $n$ -ième mois a une opinion favorable » et  $p_n$  sa probabilité.

On admet de plus, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04$ .

2. On considère l'algorithme suivant :

|                         |   |
|-------------------------|---|
| <b>Variables :</b>      | $I$ et $N$ sont des entiers naturels<br>$P$ est un nombre réel              |
| <b>Entrée :</b>         | Saisir $N$  |
| <b>Initialisation :</b> | $P$ prend la valeur 0,55  |
| <b>Traitement :</b>     | Pour $I$ allant de 1 à $N$<br>$P$ prend la valeur $0,9P + 0,04$<br>Fin Pour |
| <b>Sortie :</b>         | Afficher $P$  |

a. Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur  $N = 1$ .

b. Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = p_n - 0,4.$$

a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme  $u_0$ .

b. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

c. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  et interpréter le résultat.

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leq 0,45$ .
- b. Interpréter le résultat trouvé.

**EXERCICE 3****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note  $S$  l'état : « la personne pratique le ski de piste » et  $\bar{S}$  l'état : « la personne pratique le snowboard ».

On note également pour tout entier naturel  $n$  :

- $p_n$  la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du  $n$ -ième hiver ;
- $q_n$  la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du  $n$ -ième hiver ;
- $P_n = (p_n \quad q_n)$  la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du  $n$ -ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc  $P_0 = (1 \quad 0)$ .

**Partie A**

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets  $S$  et  $\bar{S}$ .
2. a. Donner la matrice de transition  $M$  de ce graphe probabiliste.  
b. Calculer  $M^2$ .  
c. Déterminer l'état probabiliste  $P_2$ .
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$ .
4. On considère l'algorithme suivant :

|                         |                                      |
|-------------------------|--------------------------------------|
| <b>Variables :</b>      |                                      |
| ①                       | $J$ et $N$ sont des entiers naturels |
| ②                       | $p$ est un nombre réel               |
| <b>Entrée :</b>         |                                      |
| ③                       | Saisir $N$                           |
| <b>Initialisation :</b> |                                      |
| ④                       | $p$ prend la valeur 1                |
| <b>Traitement :</b>     |                                      |
| ⑤                       | Pour $J$ allant de 1 à $N$           |
| ⑥                       | $p$ prend la valeur .....            |
| ⑦                       | Fin Pour                             |
| <b>Sortie :</b>         |                                      |
| ⑧                       | Afficher $p$                         |

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité  $p_N$ .

**Partie B**

On considère, pour tout entier naturel  $n$ , l'évènement  $S_n$  : « la personne pratique le ski de piste lors du  $n$ -ième hiver ». La probabilité de l'évènement  $S_n$  est notée  $p(S_n)$ . On a donc  $p_n = p(S_n)$ .

On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = p_n - 0,6$ .

1. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de  $u_0$ .
2. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  et interpréter le résultat.

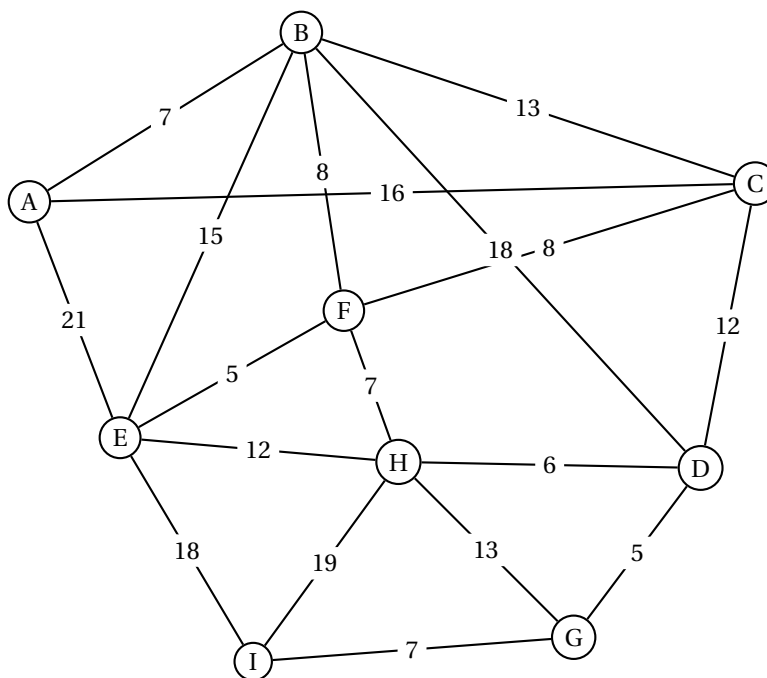
**Partie C**

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.

Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.

Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.

Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale et arrondis à  $10^{-3}$  près.

Les parties A et B sont indépendantes.

Dans un cabinet d'assurance, une étude est réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût.

**Partie A**

Une enquête affirme que 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.

1. Dans le cadre d'une étude approfondie, on choisit au hasard et de manière indépendante 15 clients.  
On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.
  - a. Justifier que la loi de probabilité de  $X$  est la loi binomiale de paramètres  $n = 15$  et  $p = 0,3$ .
  - b. Calculer  $P(X \geq 1)$ .
2. Un expert indépendant interroge un échantillon de 100 clients choisis au hasard dans l'ensemble des clients du cabinet d'assurance.
  - a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.
  - b. L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.  
Déterminer, en justifiant, si l'affirmation du cabinet d'assurance : « 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année » peut être validée par l'expert.

**Partie B**

Selon leur gravité, les sinistres sont classés en catégorie.

On s'intéresse dans cette question au coût des sinistres de faible gravité sur le deuxième semestre de l'année.

On note  $Y$  la variable aléatoire donnant le coût, en euros, de ces sinistres.

On admet que la variable aléatoire  $Y$  suit la loi normale d'espérance  $\mu = 1200$  et d'écart-type  $\sigma = 200$ .

1. Calculer la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût compris entre 1 000 € et 1 500 €.
2. Calculer la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût supérieur à 1 000 €.