

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

Mathématiques - série ES

Enseignement de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **7**

SUJET

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°1 (6 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :

- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

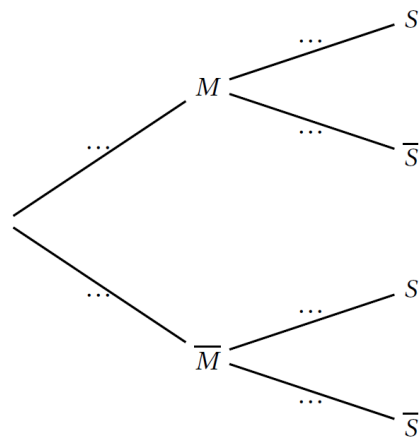
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$; $P_M(S)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S})$.

b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



c. Montrer que : $P(S) = 0,02192$.

d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}).

Commenter le résultat obtenu.

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
- c. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
 - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
 - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
- d. Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

EXERCICE n°2 (5 points)

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

- parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70% se réabonnent à ce même opérateur et 30% souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;
- parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55% se réabonnent à ce même opérateur et 45% souscrivent un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».

À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

- e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1^{er} janvier (2018 + n) ;
- g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1^{er} janvier (2018 + n) ;
- $P_n = (e_n \quad g_n)$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1^{er} janvier (2018 + n).

Au 1^{er} janvier 2018, on suppose que 10% des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = (0,1 \quad 0,9)$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G .
2.
 - a. Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
 - b. Vérifier qu'au 1er janvier 2020, environ 57% des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

3.

a. On rappelle que pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n \times M$.

Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n .

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45$.

4.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1er janvier $(2018 + n)$:

```
E ← 0,1
G ← 0,9
Pour I allant de 1 à N
    E ← ... × E + ...
    G ← ...
Fin Pour
Afficher E et G
```

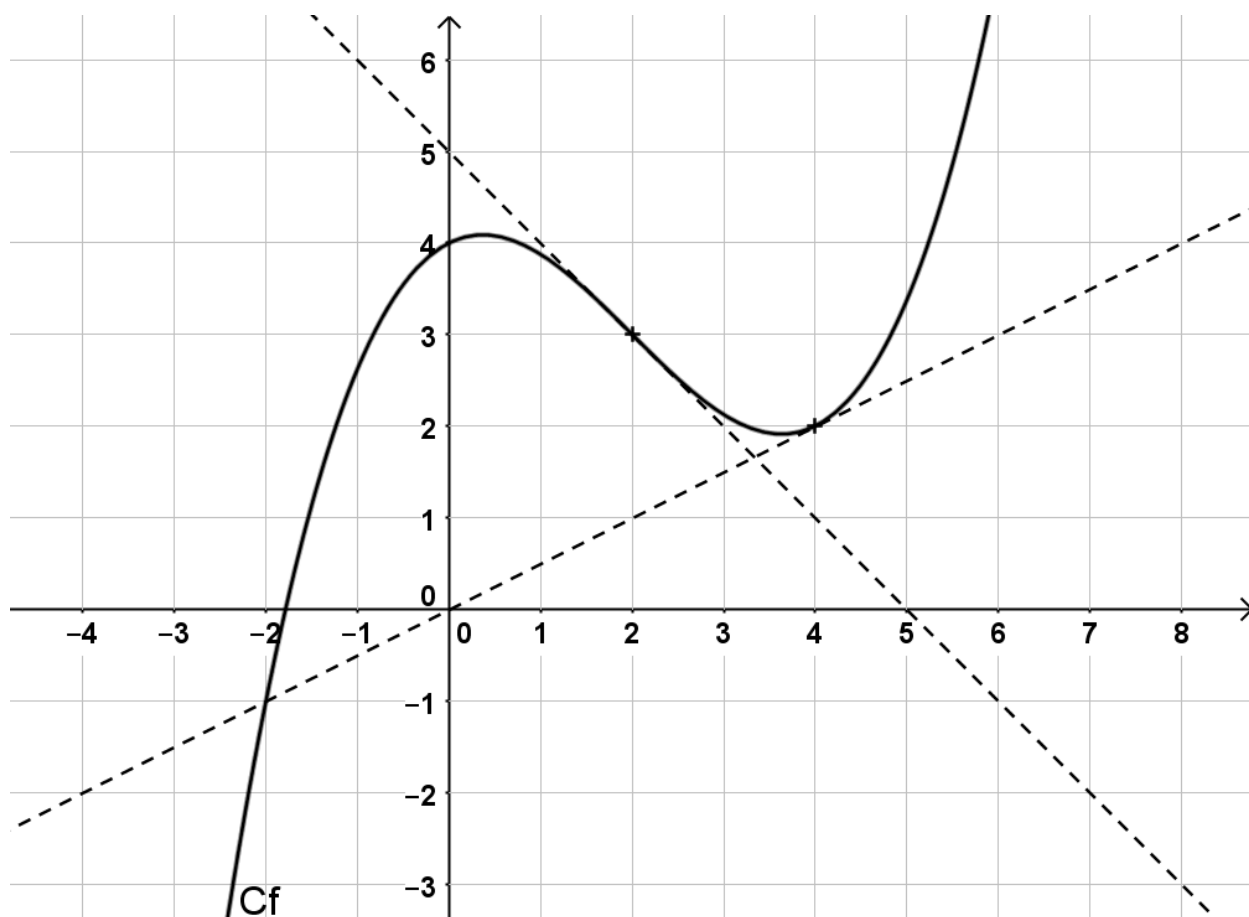
b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$. Arrondir au centième.

c. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE n°3 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule bonne réponse.

Pour les questions 1. et 2. et 3., on a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



1. $f'(4)$ est égal à :

| | |
|---------------|--------------|
| A. 2 | B. -1 |
| C. 0,5 | D. 0 |

2. f est convexe sur l'intervalle :

| | |
|----------------------------|------------------------------|
| A. $] -\infty ; 2]$ | B. $] -\infty ; 0,5]$ |
| C. $[0 ; 4]$ | D. $[2 ; 5]$ |

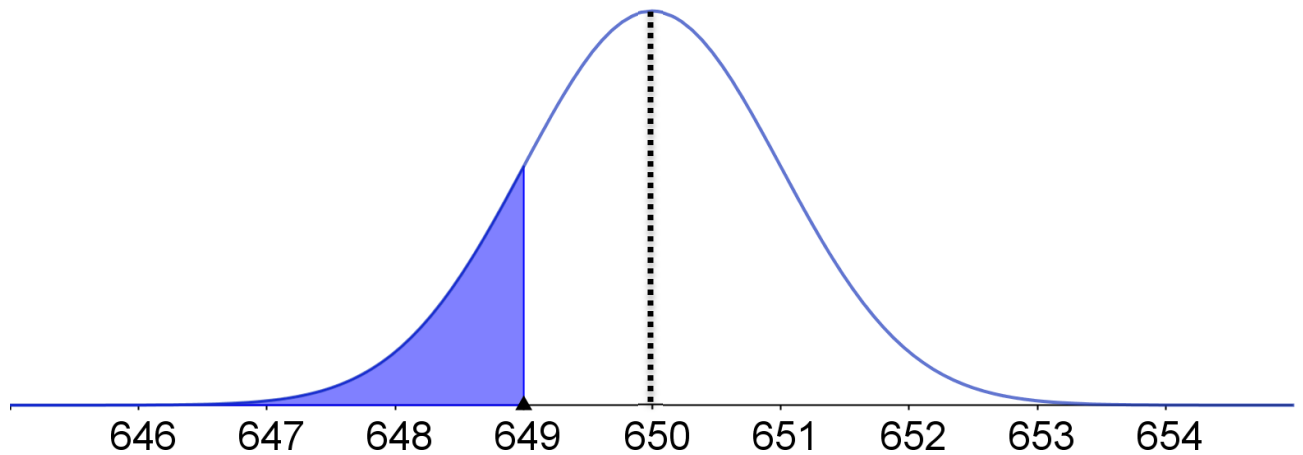
3. Une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 5]$ est :

| | |
|----------------|----------------|
| A. -0,1 | B. 2,5 |
| C. 2,9 | D. 14,5 |

4. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que

$$P(X \leq 649) \approx 0,1587.$$

On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



| | |
|--|--|
| A. $P(X \leq 651) \approx 0,6587$ | B. $P(649 \leq X \leq 651) \approx 0,683$ |
| C. $\sigma = 650$ | D. $\mu = 649$ |

EXERCICE n°4 (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 25]$ par

$$f(x) = \frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

- a. On admet que f est dérivable sur $[1 ; 25]$.

Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 25]$,

$$f'(x) = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

- b. Résoudre dans $[1 ; 25]$ l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$.
- c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1 ; 25]$.
- d. Démontrer que dans l'intervalle $[1 ; 25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.
- e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leq x \leq 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

En utilisant les résultats obtenus à la question 1. :

- a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.

Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

- b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euros.

- c. Est-il possible que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.