

## Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015

A. P. M. E. P.

### EXERCICE 1

6 POINTS

#### Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x$ .

Pour tout réel  $a$  strictement positif, on définit sur  $]0; +\infty[$  la fonction  $g_a$  par  $g_a(x) = ax^2$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\Gamma_a$  celle de la fonction  $g_a$  dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs du réel strictement positif  $a$ .

#### Partie A

On a construit en **annexe 1** (à rendre avec la copie) les courbes  $\mathcal{C}$ ,  $\Gamma_{0,05}$ ,  $\Gamma_{0,1}$ ,  $\Gamma_{0,19}$  et  $\Gamma_{0,4}$ .

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs (à préciser) du réel  $a$ .

#### Partie B

Pour un réel  $a$  strictement positif, on considère la fonction  $h_a$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que  $x$  est l'abscisse d'un point  $M$  appartenant à l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  si et seulement si  $h_a(x) = 0$ .
2. a. On admet que la fonction  $h_a$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et on note  $h'_a$  la dérivée de la fonction  $h_a$  sur cet intervalle.

Le tableau de variation de la fonction  $h_a$  est donné ci-dessous.

Justifier, par le calcul, le signe de  $h'_a(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

$x$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$h'_a(x)$		$+$	$-$
$h_a(x)$		$-\frac{1-\ln(2a)}{2}$	
	$-\infty$		

- b. Rappeler la limite de  $\frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$ . En déduire la limite de la fonction  $h_a$  en  $+\infty$ .  
On ne demande pas de justifier la limite de  $h_a$  en 0.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = 0,1$ .
  - a. Justifier que, dans l'intervalle  $]0; \frac{1}{\sqrt{0,2}}[$ , l'équation  $h_{0,1}(x) = 0$  admet une unique solution.  
On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle  $]\frac{1}{\sqrt{0,2}}; +\infty[$ .
  - b. Quel est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{0,1}$  ?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2e}$ .

- a. Déterminer la valeur du maximum de  $h_{\frac{1}{2e}}$ .
  - b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ . Justifier.
5. Quelles sont les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

**EXERCICE 2****5 POINTS****Commun à tous les candidats**

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

**Partie A**

On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

On rappelle que, pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

1. Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left( -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right).$$

2. En déduire que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

**Partie B**

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
  - a. Représenter la probabilité  $P(X \leq 1)$ .
  - b. Indiquer où se lit directement la valeur de  $\lambda$ .
2. On suppose que  $E(X) = 2$ .
  - a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  ?
  - b. Calculer la valeur de  $\lambda$ .
  - c. Calculer  $P(X \leq 2)$ . On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
  - d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

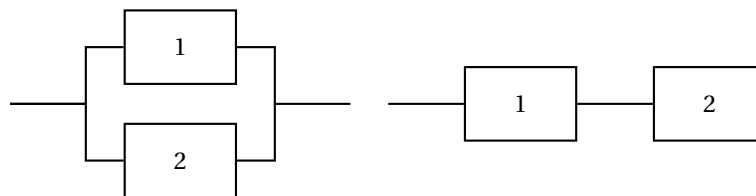
**Partie C**

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note  $D_1$  l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note  $D_2$  l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements  $D_1$  et  $D_2$  sont indépendants et que

$$P(D_1) = P(D_2) = 0,39.$$

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

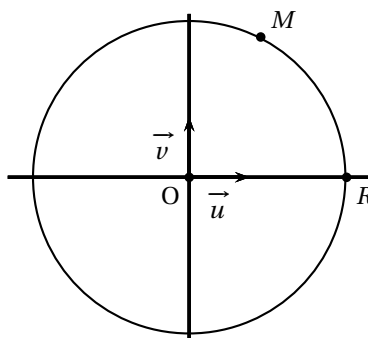
Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

**EXERCICE 3****4 POINTS****Commun à tous les candidats****Partie A**

On appelle  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on a placé un point  $M$  d'affixe  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , puis le point  $R$  intersection du cercle de centre  $O$  passant par  $M$  et du demi-axe  $[O; \vec{u})$ .



1. Exprimer l'affixe du point  $R$  en fonction de  $z$ .
2. Soit le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{1}{2} \left( \frac{z + |z|}{2} \right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point  $M'$ .

**Partie B**

On définit la suite de nombres complexes  $(z_n)$  par un premier terme  $z_0$  appartenant à  $\mathbb{C}$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  dépend du choix de  $z_0$ .

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que  $z_0$  n'est pas un nombre réel.
  - a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$ ?
  - b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

**EXERCICE 4****5 POINTS****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Demander la valeur de $p$
Traitement	: Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher $u$

Faire fonctionner cet algorithme pour  $p = 2$  en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

**Partie B**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de  $u_n$  pour  $n$  variant de 1 à  $p$ .
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi  $p = 4$ , on obtient les résultats suivants :

$n$	1	2	3	4
$u_n$	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite  $(u_n)$  est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} > u_n$ .  
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?
4. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$ .  
Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .

5. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

#### EXERCICE 4

5 POINTS

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

#### Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$ , on note  $r(a, b)$  le reste dans la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$c$ est un entier naturel $a$ et $b$ sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander $a$ Demander $b$
Traitement :	Affecter à $c$ le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à $a$ le nombre $b$ Affecter à $b$ la valeur de $c$ Affecter à $c$ le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher $b$

- Faire fonctionner cet algorithme avec  $a = 26$  et  $b = 9$  en indiquant les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  à chaque étape.
- Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$ .  
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux ou non.

#### Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

**Étape 1 :** on choisit deux entiers naturels  $p$  et  $q$  compris entre 0 et 25.

**Étape 2 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier  $x$  correspondant dans le tableau ci-dessus.

**Étape 3 :** on calcule l'entier  $x'$  défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leq x' \leq 25.$$

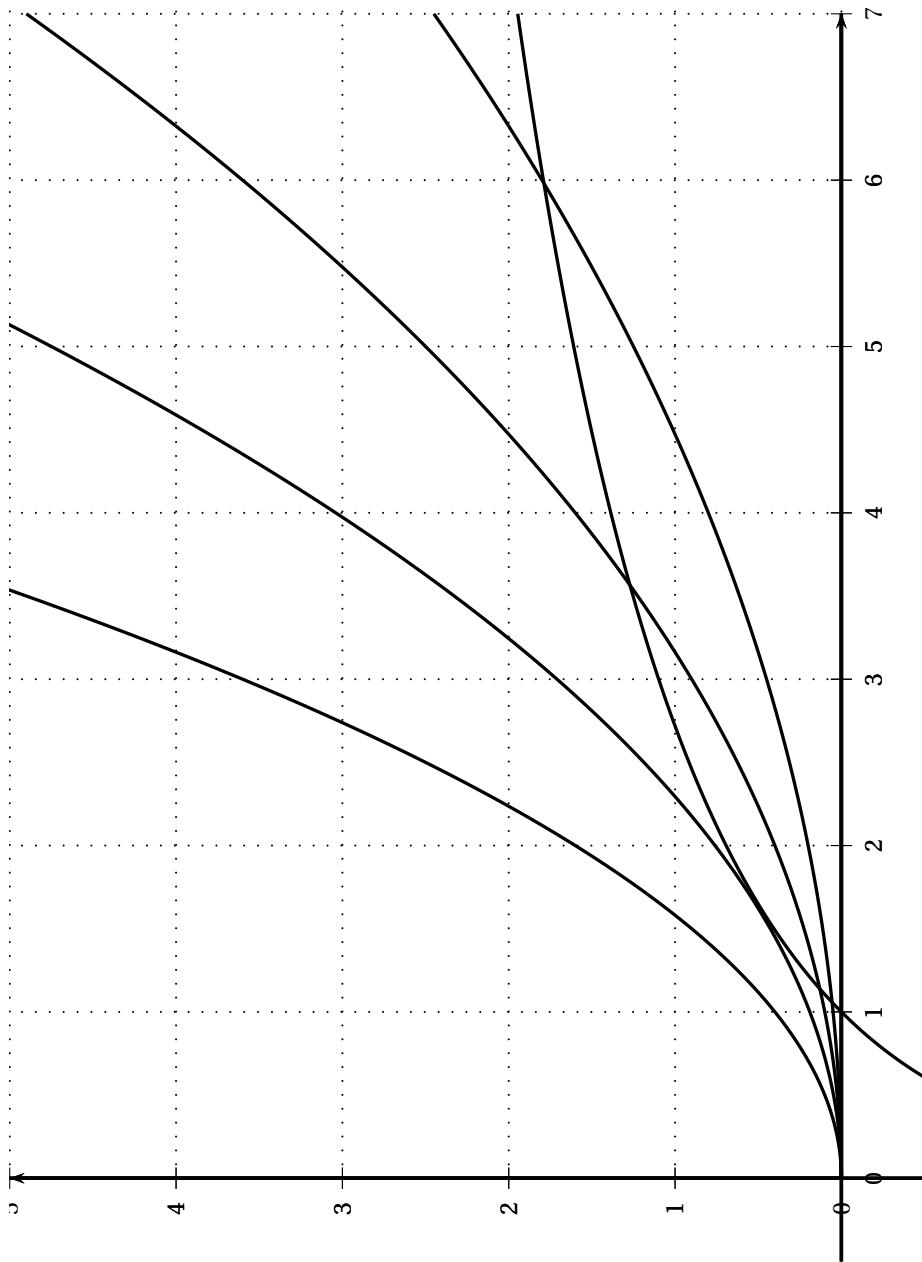
**Étape 4 :** à l'entier  $x'$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

- Dans cette question, on choisit  $p = 9$  et  $q = 2$ .
  - Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
  - Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $9u + 26v = 1$ . Donner sans justifier un couple  $(u, v)$  qui convient.
  - Démontrer que  $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$  équivaut à  $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$ .

- d.** Décoder la lettre R.
- 2.** Dans cette question, on choisit  $q = 2$  et  $p$  est inconnu. On sait que J est codé par D.  
Déterminer la valeur de  $p$  (on admettra que  $p$  est unique).
- 3.** Dans cette question, on choisit  $p = 13$  et  $q = 2$ . Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

**À RENDRE AVEC LA COPIE**

**ANNEXE 1 de l'exercice 1**



**À RENDRE AVEC LA COPIE****ANNEXE 2 de l'exercice 2**