

⌘ Baccalauréat S Amérique du Sud ⌘
22 novembre 2016

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , de deux fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$.

On considère les points $A(0,5; 1)$ et $B(0; -1)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On sait que O appartient à \mathcal{C}_f et que la droite (OA) est tangente à \mathcal{C}_f au point O .

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b , en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$

2.
 - a. On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
3. La fonction g dont la courbe représentative \mathcal{C}_g passe par le point $B(0; -1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
 - a. Déterminer l'expression de $g(x)$.
 - b. Soit m un réel strictement positif.
Calculer $I_m = \int_0^m f(t) dt$ en fonction de m .
 - c. Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m$.
4.
 - a. Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0; +\infty[$.
 - b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0; +\infty[$,
 $P(X \leq x) = g(x) + 1$.
 - c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leq \alpha) = 0,5$.
 - d. Sans utiliser une valeur approchée de α , construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha; 0)$ en laissant apparents les traits de construction.
Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leq \alpha)$.

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)(z^2 - 8z + 25) = 0$ où z appartient à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3} + i)^8$.

EXERCICE 3**3 points****Commun à tous les candidats**

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

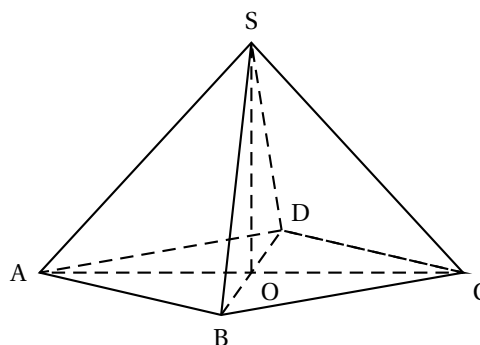
1.
 - a. À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n) , conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n . Démontrer cette conjecture.
 - b. En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n) .
2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$.

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats****Partie A : un calcul de volume sans repère**

On considère une pyramide équilatère $SABCD$ (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

Les diagonales du carré $ABCD$ mesurent 24 cm. On note O le centre du carré $ABCD$.

On admettra que $OS = OA$.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC) .
2. En déduire le volume, en cm^3 , de la pyramide $SABCD$.

Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments $[AS]$ et $[BS]$.
 - a. Justifier que $\vec{n}(1; 1; -3)$ est un vecteur normal au plan (PQC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC) .
2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) .
 - a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH) .
 - b. Calculer les coordonnées du point H .

c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\frac{3\sqrt{11}}{8}$

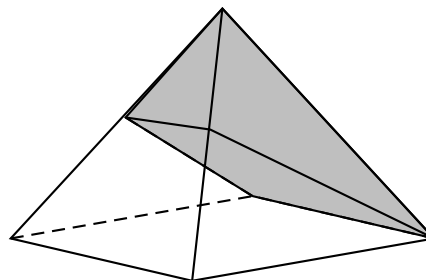
Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.

Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

EXERCICE 5

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.

Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

- Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geq 48) = 0,7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2,4$.

- Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.
- Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- Déterminer la valeur exacte de λ , sachant que le service statistique indique que $P(0 \leq T \leq 24) = 0,03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0,00127$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3.
 - a. Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
 $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.
 - b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geq 48)$ et $(T \geq 48)$ sont indépendants.

Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geq 48) = 0,7977$? Justifier la réponse.

EXERCICE 5

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots 1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
 - a. Prouver que, pour tout entier naturel j , $10^j \equiv 1 \pmod{3}$.
 - b. En déduire que $N_p \equiv p \pmod{3}$.
 - c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
 - a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \pmod{7}$.

On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

- b. Soit p un entier naturel non nul.
 Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si p est un multiple de 6.
 On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

- c. Justifier que, pour tout entier naturel p non nul, $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$.
- d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
- e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

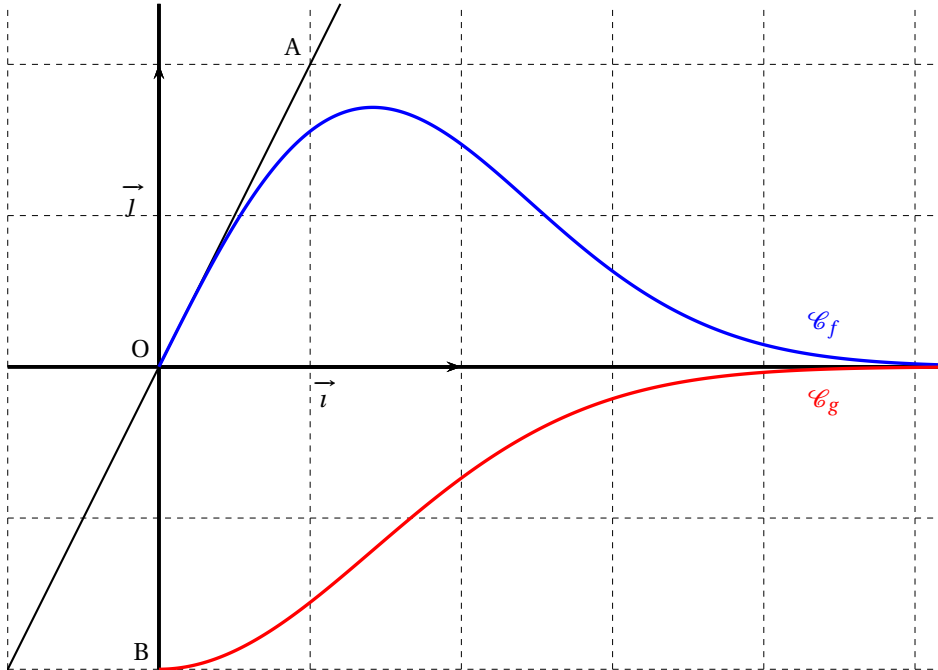
- a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots \pmod{10}$										

- b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
- c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.
2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?
3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

ANNEXES (à compléter et à remettre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 1) :



Annexe 2 (Exercice 3) :

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 0 b prend la valeur 0,5.
Traitement :	Tant que $ b - a \dots\dots$ n prend la valeur $\dots\dots$ a prend la valeur $\dots\dots$ b prend la valeur $\dots\dots$ Fin Tant que.
Sortie :	Afficher $\dots\dots$