BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2018

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé

Aucun document n'est autorisé

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet et
que toutes les pages sont imprimées.

Ce sujet comporte 6 pages

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat ou la candidate doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat ou la candidate peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

On invite le candidat ou la candidate à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qui aura été développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (élément radioactif) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de $15{,}3$ unités.
À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).

Partie A :

On admet que f est une solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y' = -0{,}124y \quad (E).$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15{,}3$.

Partie B :

On admet que la fonction f est définie par $f(t) = 15{,}3e^{-0{,}124t}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f au voisinage de l'infini.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C :

On rappelle que la fonction f donnée dans la partie B donne la concentration en carbone 14 dans un organisme après sa mort en fonction de t (en milliers d'années).

1. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à $7{,}27$ unités.
   Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à $6\,000$ ans.
2. Lorsque la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à $0{,}3\%$ de sa valeur initiale on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.
   Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

EXERCICE 2 (5 points)

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

La société Héliocel fabrique des cellules photovoltaïques destinées à être assemblées pour former des panneaux solaires qui seront ensuite installés sur le toit d'habitations pour produire de l'électricité.

Partie A :

On estime que $5\ \%$ des cellules fabriquées par Héliocel présentent un défaut et sont donc inutilisables.

On prélève au hasard un lot de 80 cellules dans la production pour vérification. Le nombre de cellules produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 80 cellules.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 80 cellules, associe le nombre de cellules inutilisables.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un lot ne contienne aucune cellule inutilisable ?
3. Un panneau solaire est constitué de 75 cellules.
   Quelle est la probabilité d'avoir assez de cellules sans défaut dans un seul lot pour pouvoir fabriquer un panneau ?

Partie B :

Après amélioration sur sa chaîne de fabrication, la société annonce une proportion de $3\ \%$ de cellules inutilisables.

Afin de vérifier cette annonce, le responsable qualité prélève de manière aléatoire un échantillon de 180 cellules et observe que 9 cellules sont inutilisables.

Cette observation remet-elle en cause l'annonce de la société ?

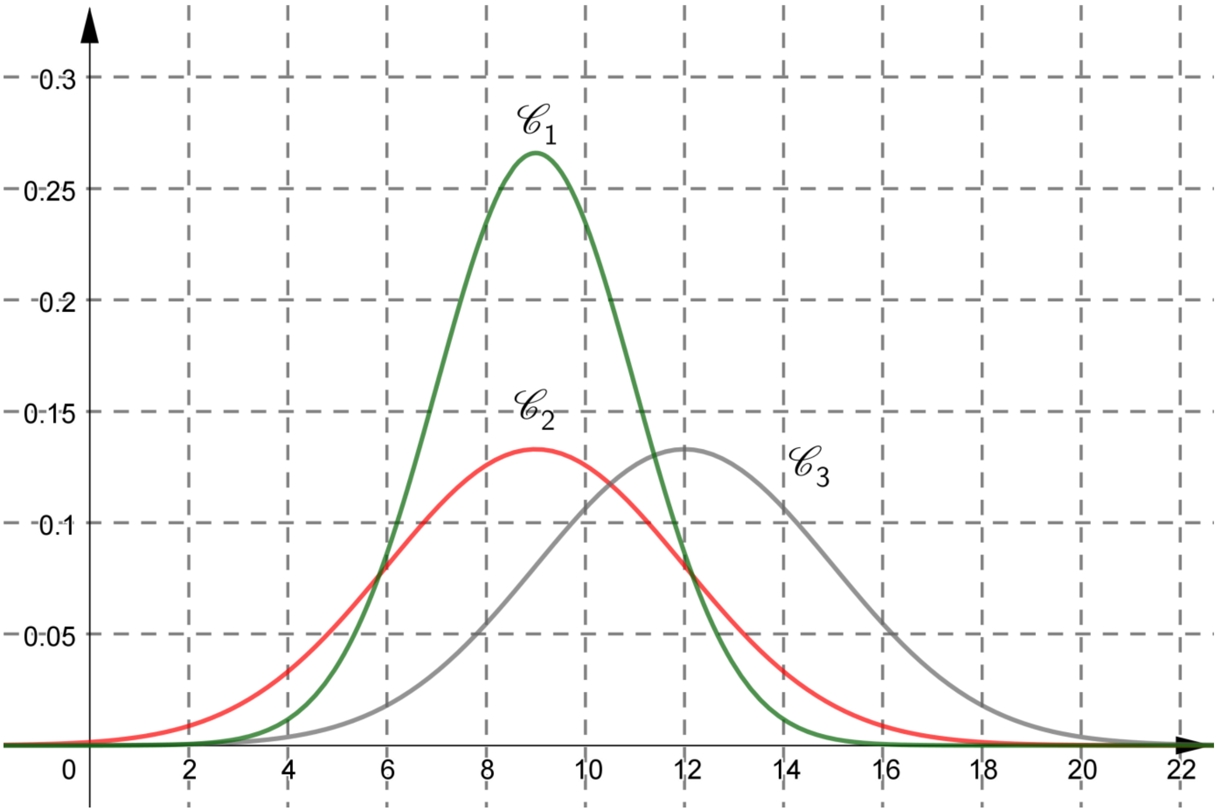
Partie C :

Une famille décide d'installer quinze de ces panneaux solaires sur le toit de sa maison pour produire de l'électricité.

La production électrique dépend de l'ensoleillement.
On appelle Y la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe la production électrique (en kWh) fournie par ces 15 panneaux.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 9$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. Quelle est la probabilité que la production journalière de l'installation de cette famille soit comprise entre 6 kWh et 12 kWh ?
2. Parmi les 3 fonctions de densité de probabilité représentées ci-dessous, laquelle peut être celle de la loi de Y ? Justifier.



3. La consommation moyenne de cette famille est 13 kWh/jour.
   Quelle est la probabilité que la production journalière de son installation soit supérieure à sa consommation moyenne quotidienne ?

EXERCICE 3 : VRAI-FAUX (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x$.
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est 3.

2. On considère le nombre complexe $z = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$.
   L'écriture exponentielle du conjugué de z est $\bar{z} = 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

3. La valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ est égale à 0.

4. La fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 3\cos 5x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$.

EXERCICE 4 (6 points)

1. Une commune de $2\ 000$ habitants au 1er janvier 2018 voit sa population augmenter de 5% tous les ans. Pour tout entier naturel n, on note h_n le nombre d'habitants de l'année $2018 + n$: on a donc $h_0 = 2\ 000$.

La suite (h_n) est une suite géométrique. Exprimer h_n en fonction de n.

La municipalité de cette commune a conclu un marché avec un fournisseur d'accès internet qui engage ce dernier à fournir un débit total de $16\ 000$ Mbit/s au 1er janvier 2018 et à augmenter ce débit de $2{,}9\%$ par an. Pour tout entier naturel n, on note d_n le débit total dont la commune dispose l'année $2018 + n$.

On modélise ainsi le débit par la suite (d_n). On a alors $d_n = 16000 \times 1{,}029^n$.

2. On s'intéresse maintenant au débit par habitant en supposant que celui-ci est réparti équitablement et que toute la population bénéficie d'une connexion internet individuelle.

Pour tout entier naturel n on note u_n le débit par habitant pour l'année $2018 + n$ et on admet que $u_n = \frac{d_n}{h_n}$.

a. Calculer u_0 et u_1.
b. Montrer pour tout entier naturel n on a $u_n = 8 \times 0{,}98^n$.
c. En déduire la nature de la suite (u_n) et ses caractéristiques.
d. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. Le marché passé avec le fournisseur d'accès internet prévoit également que si le débit passe en dessous de 5 Mbit/s par habitant alors ce dernier doit changer la technologie utilisée pour la réalisation de son réseau.

a. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer dans combien d'années le débit sera considéré comme insuffisant.

```
U ← 8
N ← 0
Tant que U ...
   U ← …
   N ← N+1
Fin Tant que
```

b. En quelle année le fournisseur d'accès sera-t-il dans l'obligation de changer sa technologie ?