Baccalauréat ES/L Amérique du Sud
23 novembre 2017

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 11 + 5\ln(x)$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 5x + 11$ **b.** $y = 5x + 6$ **c.** $y = 11x - 6$ **d.** $y = 5x + 16$

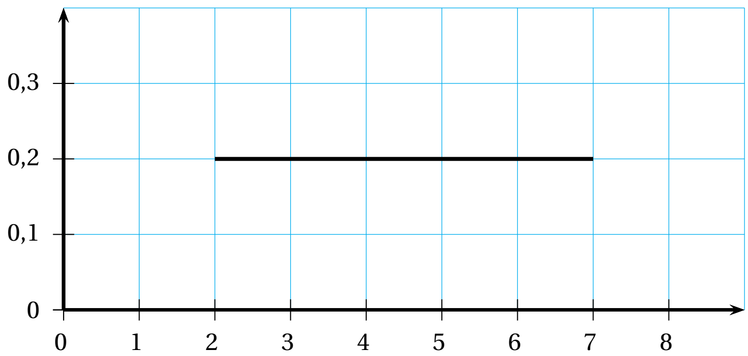
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 11 + 5\ln(x)$.
L'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x a pour solution :

a. $-\dfrac{\mathrm{e}^{11}}{5}$ **b.** $-\ln\left(\frac{11}{5}\right)$ **c.** $\mathrm{e}^{\frac{11}{5}}$ **d.** $\dfrac{\mathrm{e}^{-11}}{5}$

3. On lance cinq fois de suite un dé équilibré à six faces.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de 6 qu'on obtient.
La probabilité $p(X = 1)$ d'obtenir exactement un 6, arrondie à 10^{-2}, est :

a. 0,08 **b.** 0,17 **c.** 0,40 **d.** 0,80

4. On considère une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;\,7]$.
La fonction de densité de T est représentée ci-dessous.



La probabilité conditionnelle $P_{(T\geqslant 3)}(T \leqslant 5)$ est égale à :

a. $\dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{3}{5}$ **c.** $\dfrac{2}{5}$ **c.** $\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.

Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4 %.
Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On note a_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat A.

b_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat B.
On a donc $a_0 = b_0 = 20000$ et, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 1,04a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 1,025b_n + 330.$$

1. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat A.

a. Calculer la valeur, arrondie à l'euro, du capital disponible au bout de 10 ans.

b. Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 ans. Arrondir le résultat à 1 %.

2. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par
$u_n = 13200 + b_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $1,025$ et calculer son premier terme u_0.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$b_n = 33200 \times 1,025^n - 13200.$$

d. Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables
A est un nombre réel
B est un nombre réel
N est un nombre entier naturel
Traitement
A prend la valeur 20 000
B prend la valeur 20 000
N prend la valeur 0
Tant que $A \leqslant B$
A prend la valeur $1,04 \times A$
B prend la valeur $1,025 \times B + 330$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

a. Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.

Recopier et compléter ce tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de A et de B seront arrondies à l'unité.

Valeur de A	20 000	....	....
Valeur de B	20 000	....	....
Valeur de N	0	....	....
Condition $A \leqslant B$	vraie	....	....

b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

vspace0,5cm

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante*

Partie A

Pour les déplacements entre les principales villes d'une région, les habitants peuvent acquérir soit la carte d'abonnement bus (PassBus), soit la carte d'abonnement train (PassTrain), toutes les deux étant valables un an.

Une étude récente montre que le nombre global d'abonnements reste constant dans le temps et que, chaque année, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :

- 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain ;
- 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où le sommet B représente l'état « abonné PassBus » et T l'état « abonné PassTrain ».
2. Déterminer la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre B, T des sommets.
3. En 2016, les abonnements PassBus représentaient 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentaient 75 %.

   Quelle sera la part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements ?

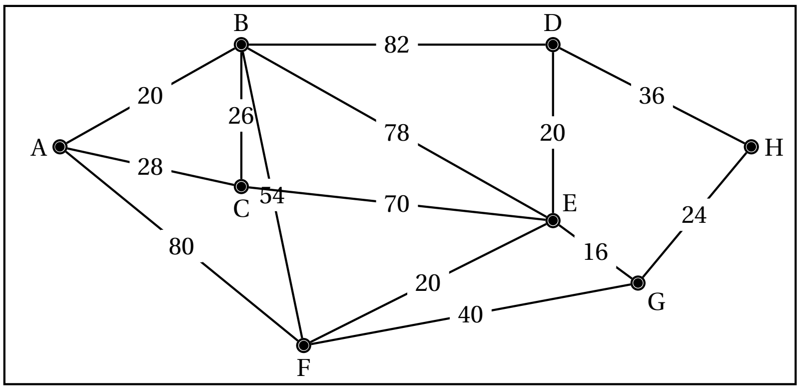
   Donner le résultat en pourcentage arrondi à $0,1$ %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Le réseau ferroviaire de la région est schématisé par le graphe ci-dessous.

Les sommets représentent les villes et les arêtes représentent les voies ferrées.

Sur les arêtes du graphe sont indiquées les distances exprimées en kilomètre entre les villes de la région.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller de la ville A à la ville H. Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.
Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au mois de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Au mois de janvier, lors du premier test, le laboratoire a prélevé au hasard 1 000 poissons parmi l'ensemble des poissons du bassin.
La fréquence de poissons infectés par la bactérie dans cet échantillon est $f_1 = 5\,\%$.
Au mois de juin, le laboratoire a prélevé de nouveau 1 000 poissons.
Pour ce second test, la fréquence de poissons infectés est $f_2 = 10\,\%$.
La fréquence de poissons infectés dans les deux échantillons ayant doublé en cinq mois, le laboratoire préconise d'arrêter la vente des poissons de l'entreprise.
On note p_1 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de janvier et p_2 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de juin.

1. Déterminer les intervalles de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 puis de la proportion p_2.
   On arrondira les bornes des intervalles à 10^{-3}.
2. Quel argument pourrait donner l'entreprise pour éviter l'arrêt de la vente ?

Partie B

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

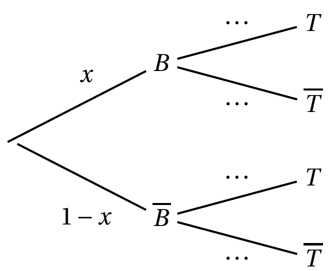
- sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;
- sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

- B l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;
- T l'évènement : « le test du poisson est positif » ;
- $\overline{B}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de B et T.

On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2. **a.** Démontrer que $p(T) = 0,5x + 0,1$.

b. Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif.

Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement ?

Partie C

Un traitement antibiotique permet de guérir les poissons infectés par la bactérie.
Le temps de guérison d'un poisson infecté, exprimé en jours, peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 21$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

Les résultats seront arrondis au millième.

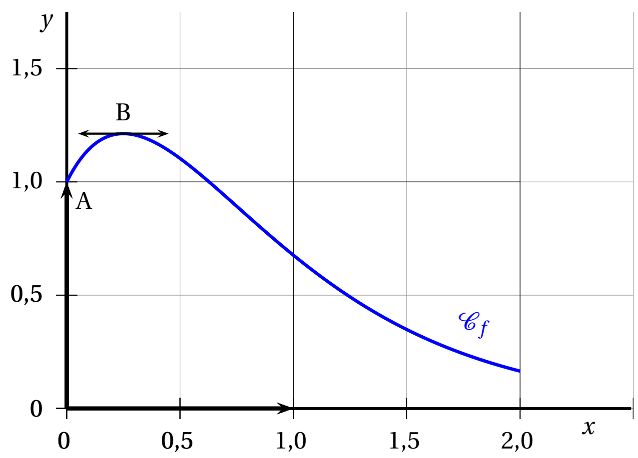
1. Déterminer la probabilité $p(14 < X < 28)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un poisson infecté ne soit pas encore guéri après 5 semaines de traitement antibiotique.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
On suppose que f est deux fois dérivable et on note f' la fonction dérivée de f.

On sait que :

- le point A(0 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0,25 est parallèle à l'axe des abscisses.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

On suppose que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

1. En utilisant le graphique et les données de l'énoncé, déterminer $f(0)$ et $f'(0,25)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs des réels a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet par ailleurs que $f'(x) = (2-8x)\mathrm{e}^{-2x}$ et $f''(x) = (16x-12)\mathrm{e}^{-2x}$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

1. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,2]$ puis en déduire les variations de f sur $[0\,;\,2]$.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $F(x) = (-2x-1,5)\mathrm{e}^{-2x}$.
   a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,2]$.
   b. En déduire l'aire exacte $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine D du plan situé entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=2$.
   c. Déterminer la valeur moyenne, arrondie à 10^{-1}, de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.