

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie  
19 novembre 2015

A. P. M. E. P.

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

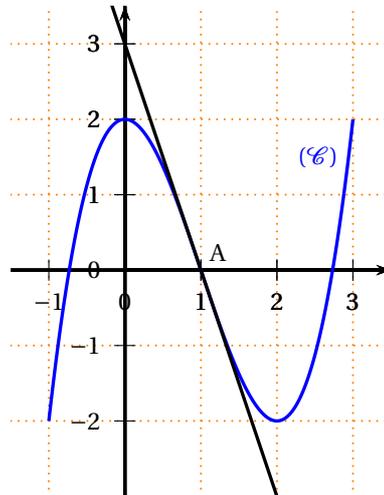
*Pour chacune des questions posées une seule des quatre réponses est exacte.*

*Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

On donne ci-dessous la représentation graphique ( $\mathcal{C}$ ) d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-1 ; 3]$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  et  $F$  une primitive de  $f$ .

La tangente à la courbe ( $\mathcal{C}$ ) au point  $A(1 ; 0)$  est tracée, elle passe par le point de coordonnées  $(0 ; 3)$ .



1. Calcul de  $f'(1)$

- |                           |                 |
|---------------------------|-----------------|
| a. $f'(1) = 3$            | b. $f'(1) = -3$ |
| c. $f'(1) = -\frac{1}{3}$ | d. $f'(1) = 0$  |

2. La fonction  $f$  est :

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| a. concave sur $[-1 ; 1]$ | b. convexe sur $[-1 ; 1]$ |
| c. concave sur $[0 ; 2]$  | d. convexe sur $[0 ; 2]$  |

3. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ . Un encadrement de  $I$  est :

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| a. $0 \leq I \leq 1$ | b. $1 \leq I \leq 2$ |
| c. $2 \leq I \leq 3$ | d. $3 \leq I \leq 4$ |

4. La fonction  $F$  est :

- |                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| a. croissante sur $[0 ; 1]$  | b. décroissante sur $[0 ; 1]$ |
| c. croissante sur $[-1 ; 0]$ | d. croissante sur $[-1 ; 1]$  |

**EXERCICE 2****5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.

On modélise cette situation par une suite numérique  $(u_n)$  où  $u_n$  représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année  $2014 + n$ , avec  $n$  un nombre entier naturel.

On a donc  $u_0 = 150$ .

1. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au périscolaire en septembre 2015.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , justifier que  $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$ .
3. On donne l'algorithme suivant :

<b>Initialisation</b>
Affecter à $n$ la valeur 0
Affecter à $U$ la valeur 150
<b>Traitement</b>
Tant que $U \leq 190$
$n$ prend la valeur $n + 1$
$U$ prend la valeur $0,8U + 40$
Fin tant que
<b>Sortie</b> Afficher le nombre $2014 + n$

- a. Recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de $n$	0	1	2		
Valeur de $U$	150				
Condition $U \leq 190$	vraie				

- b. En déduire l'affichage obtenu en sortie de l'algorithme et interpréter ce résultat.
4. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 200$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ , démontrer que  $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$ .
  - c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel  $n$  tel que :

$$200 - 50 \times 0,8^n > 190.$$

- d. À partir de quelle année la directrice du périscolaire sera-t-elle obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles ?

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.

Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.

On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à 0,4 ;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à 0,2 ;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85.

On note :

- $K$  l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\bar{K}$  l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

- $p_n$  la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du  $n$ -ième jour ;
- $q_n$  la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le  $n$ -ième jour ;
- $P_n = (p_n \quad q_n)$  la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du  $n$ -ième jour.

*Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.*

### Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets  $K$  et  $\bar{K}$ .
2. Donner la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe, les sommets  $K$  et  $\bar{K}$  étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que  $P_1 = (0,85 \quad 0,15)$ .
4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3<sup>e</sup> jour.
5. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , montrer que  $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ .
6. On considère l'algorithme suivant :

**Initialisation**  
Choisir un nombre entier naturel  $N \geq 2$   
 $p$  prend la valeur 0,85

**Traitement**  
Pour  $i$  allant de 2 à  $N$   
     $p$  prend la valeur  $0,4p + 0,2$   
Fin pour

**Sortie**  
Afficher  $p$

- a. Pour la valeur  $N = 5$  saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de $i$		2		
Valeur de $p$	0,85			

- b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de  $N$  saisie est 5.
- c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

### Partie B

D'après la partie A, on sait que  $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

On admet que  $p_n = \frac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \frac{1}{3}$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

1. Conjecturer la limite de la suite  $(p_n)$ .
2. Interpréter le résultat.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Pierre a des pommiers dans son verger. Il décide de faire du jus de pomme avec ses fruits.

Dans sa récolte :

- il dispose de 80 % de pommes de variété A et de 20 % de pommes de variété B.
- 15 % des pommes de variété A et 8 % des pommes de variété B sont avariées et devront être jetées.

On prend une pomme au hasard dans la récolte et on note :

- $A$  l'évènement « la pomme est de variété A » ;
- $B$  l'évènement « la pomme est de variété B » ;
- $J$  l'évènement « la pomme est jetée » ;
- $\bar{J}$  l'évènement contraire de l'évènement  $J$ .

On note  $p(A)$  la probabilité de l'évènement  $A$ .

*Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.*

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.

**Partie A**

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la pomme soit de variété A et soit jetée.
3. Montrer que la probabilité qu'une pomme soit jetée est égale à 0,136.
4. Calculer la probabilité qu'une pomme soit de variété A sachant qu'elle a été jetée.

**Partie B**

Une pomme pèse en moyenne 150 g.

On modélise le poids d'une pomme en grammes par une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale d'espérance  $\mu = 150$  et d'écart type  $\sigma = 10$ .

1. Déterminer la probabilité que la pomme ait un poids inférieur à 150 g.
2. Déterminer  $p(120 \leq X \leq 170)$ . Interpréter ce résultat.

**Partie C**

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes.

Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur  $[8; 9,5]$ .

Déterminer la probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 10]$  par

$$f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20.$$

**Partie A**

1. Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; 10]$ ,  $f'(x) = (-2x + 7)e^{-x+4}$ .
2. En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .  
Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.
3. Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 10]$  et déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de  $\alpha$ .
4. On admet que la fonction  $F$  définie sur  $[0; 10]$  par

$$F(x) = (-2x + 3)e^{-x+4} + 20x$$

est une primitive de  $f$  sur  $[0; 10]$ .

Calculer la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ . Arrondir le résultat au millième.

**Partie B**

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend  $x$  centaines d'objets est modélisé par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 10]$  par :

$$f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?  
Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?
3. Interpréter le résultat de la question 4 de la partie A.