Baccalauréat ES/L Amérique du Sud 13 novembre 2019

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 et 2, on considère une entreprise qui produit des plaquettes de beurre de 250 grammes.

1. La masse des plaquettes est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 1$.
Alors, à 10^{-3} près, on a :

A. $P(X < 250) \approx 0{,}459$	B. $P(X > 249) \approx 0{,}659$
C. $P(X < 249) \approx 0{,}159$	D. $P(X < 252) \approx 0{,}997$

2. Pour être conformes, ces plaquettes de beurre doivent avoir une masse nette comprise entre 248 et 252 grammes.
Un contrôleur prélève au hasard un échantillon de 900 plaquettes et constate que 864 sont conformes.
L'intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95 %, de la proportion de plaquettes de beurre conformes est, avec les bornes données à 10^{-3} près :

A. $[0{,}91~;~1{,}01]$	B. $[0{,}926~;~0{,}994]$
C. $[0{,}245~;~0{,}255]$	D. $[0{,}958~;~0{,}962]$

3. Lors d'une tombola, les organisateurs affirment que 20 % des tickets sont gagnants. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée des tickets gagnants pour un échantillon de 200 tickets tirés au hasard est, avec des valeurs approchées des bornes données à 10^{-3} près :

A. $[0{,}150~;~0{,}250]$	B. $[0{,}195~;~0{,}205]$
C. $[0{,}182~;~0{,}218]$	D. $[0{,}144~;~0{,}256]$

4. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0~;~30]$ par :

$$f(x) = x^3 - 39x^2 + 315x + 45.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On a alors :

A. f est convexe sur l'intervalle $[0~;~30]$
B. f est concave sur l'intervalle $[5~;~21]$
C. $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 13
D. Si f' désigne la fonction dérivée de f, alors f' est croissante sur l'intervalle $[0~;~5]$ et sur l'intervalle $[21~;~30]$

Exercice 2 5 points

Commun à tous les candidats

Au 1er janvier 2018, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2018+n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2020 ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times 0{,}96^n$.

3. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.
On considère l'algorithme ci-dessous

Ligne 1	$n \leftarrow 0$
Ligne 2	$u \leftarrow 5000$
Ligne 3	Tant que ......
Ligne 4	$n \leftarrow n+1$
Ligne 5	$u \leftarrow$ ......
Ligne 6	Fin tant que

a. Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de cet algorithme afin qu'il réponde à la problématique énoncée ci-dessus.

b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.

Exercice 3 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.

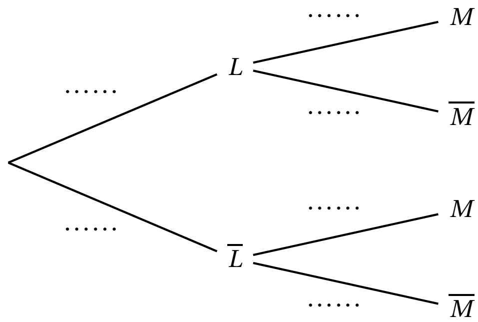
- Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures ; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'évènement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son évènement contraire.

1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

4. Justifier que $P(M) = 0{,}513$.

5. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

6. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.

- **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
- **b.** Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.
- **c.** Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures ?

Exercice 3 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Une course cyclosportive propose deux parcours : un grand de 130 kilomètres et un petit de 70 kilomètres.

L'étude ci-après porte sur les cyclistes fidèles qui participent tous les ans à cette épreuve.

En 2018, 42 % des cyclistes ont fait le grand parcours, les autres le petit.

Ces dernières années, les organisateurs ont constaté que :

- 90 % des cyclistes ayant fait le grand parcours une année se réinscrivent pour ce même parcours l'année suivante ; les autres s'inscrivent pour faire le petit parcours.
- 15 % des cyclistes ayant fait le petit parcours une année s'inscrivent sur le grand parcours l'année suivante ; les autres restent fidèles au petit parcours.

On note G l'état : « le cycliste fait le grand parcours », S l'état : « le cycliste fait le petit parcours » et $P_n = \begin{pmatrix} g_n & s_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne donnant la probabilité, pour un cycliste, de participer respectivement au grand et au petit parcours lors de la course de l'année $(2018 + n)$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets G et S.

2. Recopier et compléter la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre des sommets G puis S :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

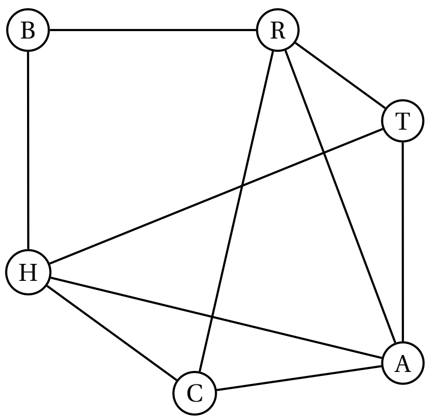
3. Déterminer l'état initial P_0 et l'état P_1.
   En déduire le pourcentage de cyclistes qui, selon ce modèle, participeront au grand parcours en 2019.
4. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'état stable de ce graphe.
   a. Calculer x et y en résolvant un système.
   b. Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme le grand parcours aura plus de succès que le petit ?

Partie B

Au village départ de cette course cyclosportive, les différents stands présents sont :

- le stand des vélos de routes (R),
- le stand des VTT (T),
- le stand des BMX (B),
- le stand de l'habillement (H),
- le stand des compteurs et GPS (C),
- le stand des accessoires et pièces détachées (A).

Le graphe ci-dessous représente le plan du village départ : les sommets correspondent aux stands et les arêtes aux allées qui les relient.



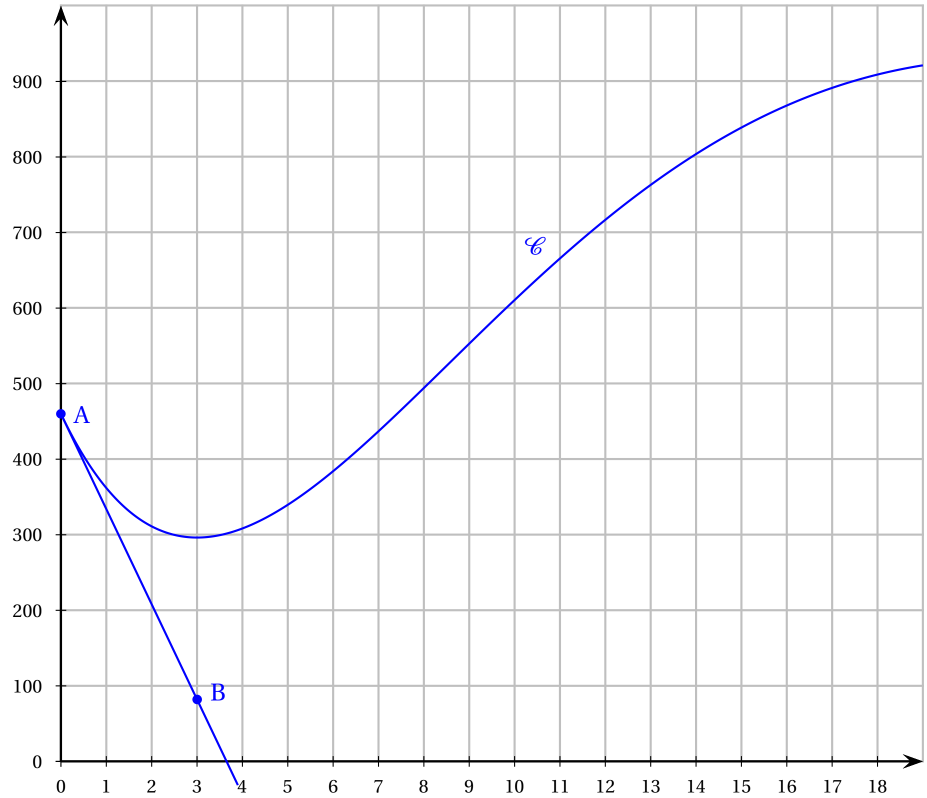
1. Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier les réponses.
2. Un cycliste peut-il visiter tous les stands en empruntant une et une seule fois chacune des allées ? Justifier la réponse. Si oui, donner un trajet possible en précisant le stand de départ et celui d'arrivée.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 (année numéro 0) et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A(0; 460) et B(3; 82), est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par ($\mathscr{C}$)?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;29]$ par :

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\,\text{e}^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;29]$.
   a. Démontrer que f' est définie par :
   $$f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\,\text{e}^{-0,1x}.$$
   b. On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	**Résultat :**
Solve$(-2x^2+48x-126=0)$	3 et 21

Retrouver ce résultat par le calcul.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

d. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3\,;\,21]$. Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.

Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000 ?

4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ par :

$$F(x) = \left(-200x^2 - 3\,200x - 36\,600\right)\text{e}^{-0,1x}$$

est une primitive de la fonction f.

Déterminer à mille près l'audience journalière moyenne de téléspectateurs de la chaîne de télévision entre le 1er janvier 2018 et le 1er janvier 2019.