ൟ Baccalauréat ES Centres Etrangers 12 juin 2013 ൟ

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$.
On a donc $U_0 = 40000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1200$.
On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur de U_1 est :

a. 6 200 **b.** 35 000 **c.** 36 200 **d.** 46 200

2. La suite (V_n) est :

a. géométrique de raison $-12,5\%$
b. géométrique de raison $0,875$
c. géométrique de raison $-0,875$
d. arithmétique de raison -9600

3. La suite (U_n) a pour limite :

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 200 **d.** 9 600

4. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :
    U, N
INITIALISATION :
    U prend la valeur 40 000
    N prend la valeur 0
TRAITEMENT :
    Tant que U > 10000
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur 0,875 × U + 1200
    Fin du Tant que
SORTIE :
    Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :

a. la valeur de U_{40000}
b. toutes les valeurs de U_0 à U_N
c. le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leqslant 10000$
d. le nombre de termes inférieurs à 1 200

5. La valeur affichée est :

a. 33 **b.** 34 **c.** 9 600 **d.** 9 970,8

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.
On sait que :

- 15 % des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80 % contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10 % contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».
L'évènement contraire de l'évènement A sera noté $\overline{\text{A}}$.
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

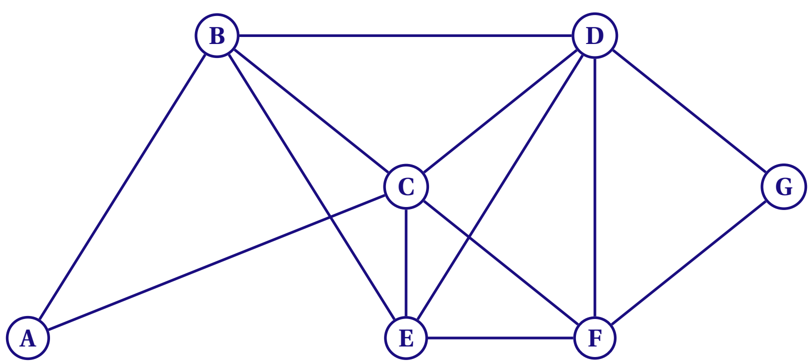
1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
3. Définir par une phrase l'évènement $\text{E} \cap \text{V}$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à $0,205$.
5. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.

   Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à $0,001$ près.
6. Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de 45 000 sacs. Chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu $0,80$ euro sur l'exploitation agricole et $3,40$ euros dans des supermarchés.

   Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



1. Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
2. **a.** Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

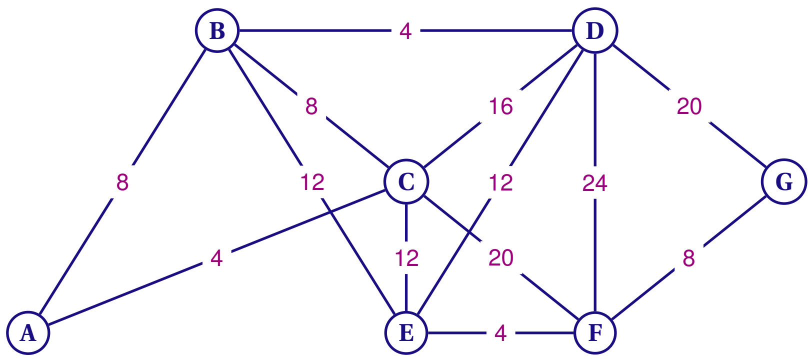
b. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3\\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5\\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5\\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8\\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5\\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7\\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

3. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

Montrer qu'un tel parcours est possible.

4. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

a. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

b. Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2 ; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2 ; 8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2 ; 8]$.

b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.

3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2 ; 8]$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; 8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

a. Montrer que f est une fonction convexe sur $[4{,}8 ; 8]$.

b. Montrer que le point de (C) d'abscisse $4,8$ est un point d'inflexion.

4. On considère la fonction F définie sur $[2~;~8]$ par :

$$F(x) = -x + 10\ln x + \frac{16}{x}$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[2~;~8]$.

b. Calculer $I = \int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20~;~120]$.

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120,~400)$.

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.

b. Montrer l'équivalence :

$$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$$

c. On définit la variable aléatoire X par $X = \dfrac{J-120}{20}$.

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à $0,001$ près.