BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

Mathématiques - série ES

Enseignement de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **7**

SUJET

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez <u>sur votre copie</u> le numéro de la question et indiquerez la seule réponse choisie.

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-3x} + e^2$.

A. $f'(x) = -3e^{-3x} + 2e$	**B.** $f'(x) = -3e^{-3x} + e^2$
C. $f'(x) = -3e^{-3x}$	**D.** $f'(x) = e^{-3x}$

2. D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017. L'arrondi au dixième du taux d'évolution annuel moyen est de :

A. $10{,}5\%$	**B.** $68{,}8\%$
C. $39{,}3\%$	**D.** $20{,}8\%$

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 2{,}4$. L'arrondi au centième de $P(X \geq 12{,}5)$ est :

A. $0{,}58$	**B.** $0{,}42$
C. $0{,}54$	**D.** $0{,}63$

4. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[14\,;16]$.
$P(X \leq 15{,}5)$ est égal à :

A. $0{,}97$	**B.** $0{,}75$
C. $0{,}5$	**D.** $\frac{1}{4}$

EXERCICE n°2 (5 points)

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance.

Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :

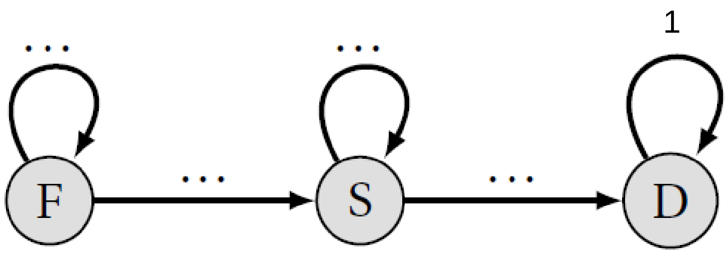
- fonctionnel (F) ;
- en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;
- défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :

- concernant les automates fonctionnels, 90% le restent et 10% deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis, 80% le restent et 20% deviennent défaillants.

1.

a. Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



b. Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

c. Voici la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre F, S, D.

Préciser la signification du coefficient 0,2 dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates. On note ainsi pour tout entier naturel n :

- f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnel le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le $n^{\text{ième}}$ jour.

On note alors $P_n = (f_n \quad s_n \quad d_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.

Enfin, la société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels : on a donc $P_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

a. Calculer P_1.

b. Montrer que, le 3$^{\text{ème}}$ jour, l'état probabiliste est $(0{,}729 \quad 0{,}217 \quad 0{,}054)$.

c. Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P = (0 \quad 0 \quad 1)$.
Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0{,}1 f_n + 0{,}8 s_n$.

b. On vérifierait de même que pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = 0{,}2 s_n + d_n \text{ et } f_{n+1} = 0{,}9 f_n.$$

Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← …
F ← 1
N ← 0
Tant que ……
    D ← 0,2 × S + D
    S ← 0,1 × F + 0,8 × S
    F ← 0,9 × F
    N ← …
Fin Tant que
Afficher …
```

c. Au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient-elle supérieure à 30 % ?

d. Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.

EXERCICE n°3 (5 points)

Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40% des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.
Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité. Les autres guirlandes peuvent être utilisées aussi bien en intérieur qu'en extérieur.

1. On choisit au hasard une guirlande dans le stock.

- On note A l'événement « la guirlande provient du fournisseur A » et B l'événement « la guirlande provient du fournisseur B ».
- On note I l'événement « la guirlande peut être utilisée uniquement en intérieur ».

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Montrer que la probabilité $P(I)$ de l'évènement I est 0,3.

c. On choisit une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur. Le responsable de l'entreprise estime qu'il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.

Le responsable a-t-il raison ? Justifier.

2. Une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur est vendue 5€ et une guirlande pouvant être utilisée uniquement en intérieur est vendue 3€.
Calculer le prix moyen d'une guirlande prélevée au hasard dans le stock.

3. Lors d'un contrôle qualité, on prélève au hasard 50 guirlandes dans le stock. Le stock est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On admet que la proportion de guirlandes défectueuses est égale à 0,02.
Calculer la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

4. L'entreprise souhaite connaître l'opinion de ses clients quant à la qualité de ses guirlandes électriques. Pour cela elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire, une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau de confiance de 95% à l'aide d'un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 8%.

Combien l'entreprise doit-elle interroger de clients au minimum ?

EXERCICE n°4 (6 points)

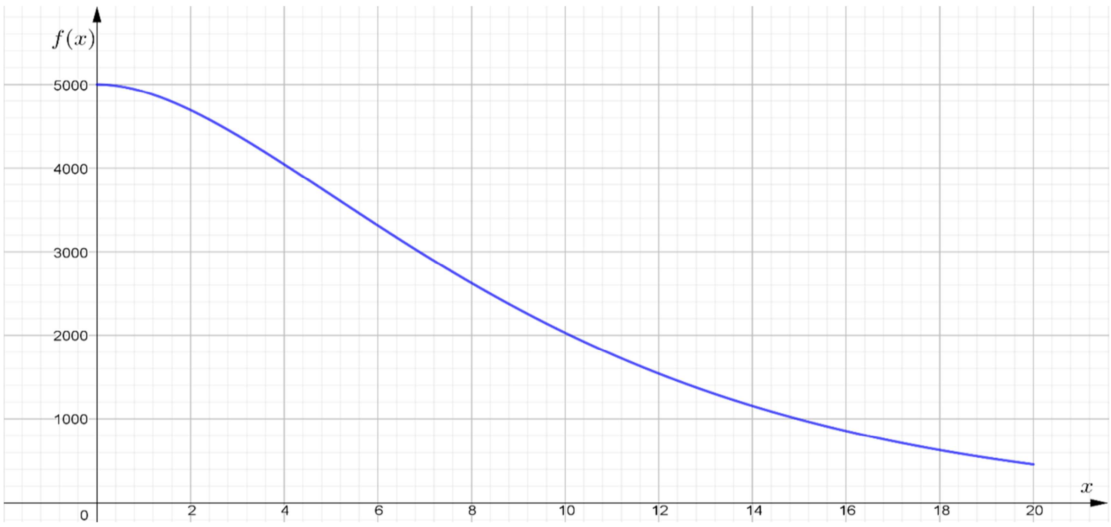
On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0\,;20]$ par :

$$f(x) = 1000(x+5)e^{-0,2x}.$$

Partie A – Étude graphique

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.



1. Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x) = 3000$.
2. Donner graphiquement une valeur approchée de l'intégrale de f entre 2 et 8 à une unité d'aire près. Justifier la démarche.

Partie B – Étude théorique

1. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0\,;20]$.

   Démontrer que pour tout x de $[0\,;\,20]$, $f'(x) = -200xe^{-0,2x}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau des variations sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 3000$ admet une unique solution α sur $[0\,;20]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.

4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par l'expression $F(x) = -5000(x+10)e^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,20]$.

   Calculer $\int_2^8 f(x)\,dx$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

Partie C – Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par la fonction f étudiée dans les parties A et B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre aux questions suivantes :

1. En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3000 objets ?
2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;8]$. Interpréter ce résultat.