B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2019

Vendredi 21 juin 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8*, *dont l'annexe 1 et l'annexe 2 page 8/8 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

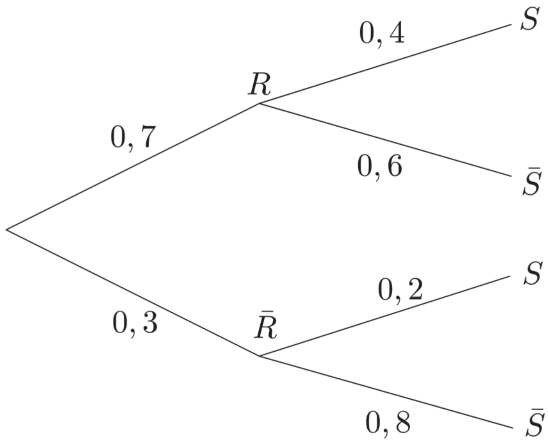
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité)

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. *Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.*
   On considère l'arbre pondéré suivant :



   Affirmation 1 : La probabilité de $\bar{R}$ sachant S est $0{,}06$.

2. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[k\ ;\ 18]$. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

   Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

3. On considère l'équation suivante :
$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5$$
   Affirmation 3 : $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est l'unique solution de cette équation.

4. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30 ↘	-5 ↗	20

   Affirmation 4 : La courbe représentative C_f de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   Affirmation 5 : La fonction f est convexe sur $[5\,;15]$.

Exercice 2 (5 points)
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Pour se rendre à l'université, Julie peut emprunter deux itinéraires, l'un passant par des routes départementales, l'autre par une voie rapide. Elle teste les deux itinéraires.
Lorsque Julie emprunte la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte le même itinéraire le lendemain est de 0,6.
Lorsque Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2.
Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide.

On note :

- D l'événement « Julie emprunte les routes départementales » ;
- R l'événement « Julie emprunte la voie rapide ».

1. a) Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés D et R.
   b) Donner la matrice d'adjacence M correspondant au graphe probabiliste. Les sommets du graphe seront rangés dans l'ordre alphabétique.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n-ième jour est défini par la matrice $P_n = (d_n \quad r_n)$ où d_n désigne la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le n-ième jour et r_n la probabilité que Julie emprunte la voie rapide le n-ième jour.
   a) Donner P_1.
   b) Calculer M^2 et en déduire la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3^{e} jour.

3. a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire les expressions de d_{n+1} et r_{n+1} en fonction de d_n et r_n.
   b) Parmi les algorithmes suivants, lequel donne les termes d_3 et r_3 ?

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$D \leftarrow 0$ $R \leftarrow 1$ Pour N allant de 1 à 3 $\quad D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$ $\quad R \leftarrow 0{,}2D + 0{,}6R$ Fin Pour	$D \leftarrow 0$ $R \leftarrow 1$ Pour N allant de 1 à 3 $\quad D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$ $\quad R \leftarrow 1 - D$ Fin Pour	$D \leftarrow 0$ $R \leftarrow 1$ Pour N allant de 2 à 3 $\quad D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$ $\quad R \leftarrow 1 - D$ Fin Pour

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}4\, r_n + 0{,}2$.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = r_n - \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n non nul.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_1.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}4^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0{,}4^{n}$$
   c) Que peut-on prévoir sur le long terme ?

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A
Les cours d'eau français sont surveillés quotidiennement afin de prévenir la population en cas de crue ou pénurie d'eau.
Dans une station hydrométrique, on mesure le débit quotidien d'une rivière.
Ce débit en mètre cube par seconde ($m^3.s^{-1}$) peut être modélisé par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 15{,}5$ et $\sigma = 6$.
On estime qu'il y a pénurie d'eau lorsque le débit de la rivière est inférieur à 8 $m^3.s^{-1}$.
On estime qu'il y a un risque de crue lorsque le débit est supérieur à 26 $m^3.s^{-1}$.
Entre ces deux débits, il n'y a pas de vigilance particulière.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait pénurie d'eau.
2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de vigilance particulière.
3. Justifier, sans utiliser la calculatrice, que la probabilité que le débit observé soit compris entre $3{,}5$ $m^3.s^{-1}$ et $27{,}5$ $m^3.s^{-1}$ est d'environ $0{,}95$.

Partie B
Deux équipes effectuent les relevés de débit du cours d'eau sur la station hydrométrique. Sébastien appartient à la première équipe.
Un quart des relevés est effectué par l'équipe de Sébastien, le reste par la seconde équipe.
On choisit 10 relevés au hasard sur l'ensemble des relevés de la station, ensemble qui est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à 10 tirages avec remise. On s'intéresse au nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi ces 10 relevés.

1. Quelle loi de probabilité modélise cette situation ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

Partie C
Ces relevés sont utilisés pour tester la qualité de l'eau : « satisfaisante » ou « non satisfaisante ». On s'intéresse à la proportion de relevés de qualité « satisfaisante ».
Combien, au minimum, faut-il effectuer de relevés pour obtenir un intervalle au niveau de confiance de 95 % dont l'amplitude est inférieure à 0,1 ?

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

La courbe représentative de f, notée C_f est donnée en **annexe 2**.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;60]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en ***annexe 2****.*

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f.

1. Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.
2. Déterminer $f''(7)$.
3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.
   a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.
   b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

Partie B

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;60]$ on a :
$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

1	Dérivée $\left(\text{Dérivée}\left(70 + (14\,x + 42)\ e^{-\frac{x}{5}}\right)\right)$
	$\rightarrow\ \dfrac{1}{25}\ (14\,x + 42)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} - \dfrac{28}{5}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}$
2	Factoriser $\left(\dfrac{1}{25}\ (14\,x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \dfrac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}\right)$
	$\rightarrow\ 14\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} \cdot \dfrac{x - 7}{25}$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de f.

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;60]$, on pose :

$$g(x) = (14x + 42)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

et

$$G(x) = (-70x - 560)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

   a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   c) Calculer la valeur exacte de $\int_0^{60} f(x)\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

Partie C

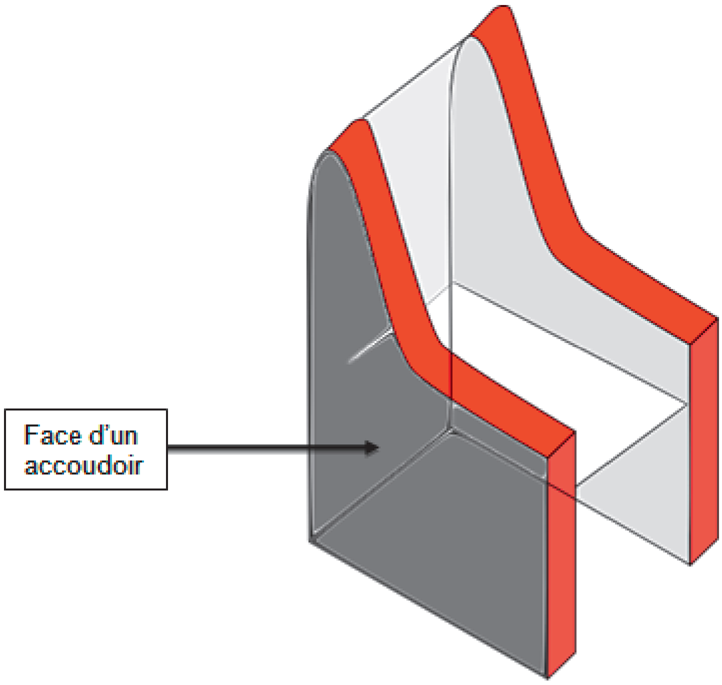
L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 1 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2. Aura-t-il suffisamment de vernis ?

Annexes : à rendre avec la copie

Exercice 4

Annexe 1 : ébauche du fauteuil



Annexe 2