Durée : 3 heures

∽ Baccalauréat Terminale ES/L – Métropole - La Réunion ∾ 11 septembre 2020

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question son numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+1}$.

   La fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie sur par :

   a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2+1}$ **b.** $f'(x) = \left(-x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2+1}$
   c. $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2+1}$ **d.** $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

2. Soit a un réel quelconque. On pose :

$$B = \frac{\mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}^{3-a}}{\mathrm{e}}.$$

   Alors :

   a. $B = \mathrm{e}^2$ **b.** $B = 7,39$ **c.** $B = \mathrm{e}^{3a-a^2-1}$ **d.** $B = a \times \mathrm{e}^{3-a}$

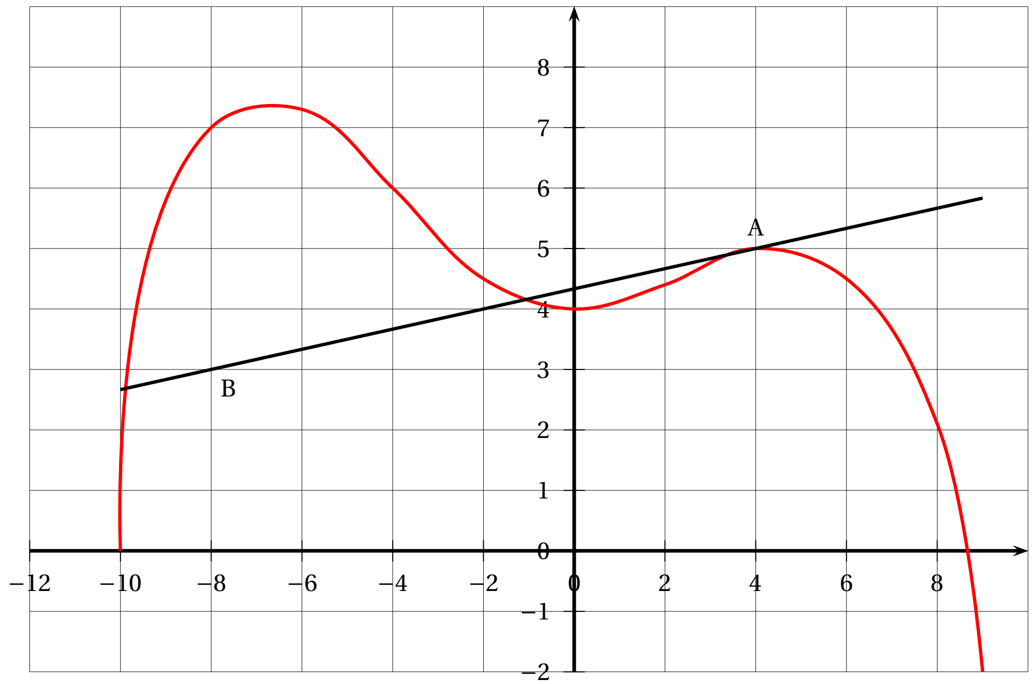
3. Un institut réalise un sondage sur « les Français et la musique » auprès d'un échantillon représentatif de 1 408 personnes.

   28 % des personnes interrogées déclarent qu'elles chantent régulièrement sous la douche (*données : Institut BVA-Presse Régionale-Foncia, mars 2017*).

   Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 0,95 et dont les bornes sont arrondies au millième, de la proportion de Français qui chantent régulièrement sous la douche est :

   a. [0,253 ; 0,307] **b.** [1 013 ; 1 803] **c.** [0,201 ; 0,359] **d.** [0,279 ; 0,281]

Pour les deux questions suivantes, on utilisera le repère ci-dessous, dans lequel on a tracé la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[-10 ; 9]$. La tangente au point A de coordonnées (4 ; 5) passe par le point B de coordonnées (-8 ; 3).



4. Le nombre dérivé $g'(4)$ est égal à :

a. 5 **b.** 0 **c.** 6 **d.** $\dfrac{1}{6}$

5. On pose $I = \displaystyle\int_{-2}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x$.

a. $12 \leqslant I \leqslant 15$ **b.** $24 \leqslant I \leqslant 30$
c. $I = 6$ **d.** $I = g(4) - g(-2)$

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

En France, la pratique de l'escalade est en plein essor ces dernières années, notamment grâce aux nombreuses ouvertures de salles dans les villes. La Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade (FFME) comptait 90 000 adhérents au début de l'année 2017.
On estime qu'au début de chaque année :

- 21 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 29 400 nouveaux pratiquants s'inscrivent.

À partir de ces données, on modélise le nombre d'adhérents n années après le début de l'année 2017 par une suite (u_n). Ainsi $u_0 = 90\,000$.

1. Calculer le nombre d'adhérents au début de l'année 2018 puis au début de l'année 2019.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,79u_n + 29\,400$.

3. On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 135\,000$.

On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 90000
Tant que ...
    N ← N+1
    U ← ...
Fin Tant que
```

a. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il permette de répondre à la question posée.

b. Quelle est la valeur de N après l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_n - 140\,000.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = -50\,000 \times 0,79^n + 140\,000$$

c. La FFME peut-elle espérer dépasser les 140 000 adhérents ?
Justifier la réponse.

5. Pour automatiser l'estimation du nombre d'adhérents et du nombre de personnes ne renouvelant pas leur adhésion chaque année, on prépare la feuille de calcul suivante, dans laquelle les colonnes B et C sont au format nombre, arrondi à l'unité.

	A	B	C
1	n	u_n	nombre de non renouvellements
2	0	90 000	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		

a. Pour obtenir les termes de la suite (u_n) quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 avant de la recopier vers le bas ?

b. Pour estimer le nombre de personnes ne renouvelant pas leur adhésion en début d'année, quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3 avant de la recopier vers le bas ?

Exercice 3 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

Pour tous évènements E et F, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E, $p(E)$ la probabilité de E et, si F est un évènement de probabilité non nulle, $P_F(E)$ la probabilité de E sachant F.

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

Partie A

Une scierie produit des planches en chêne, en sapin ou en bois de hêtre pour fabriquer des parquets massifs. Il existe deux qualités de planche : les planches déclassées (de moins bonne qualité) et les planches de premier choix (de qualité supérieure). On sait que :

- 20 % des planches produites sont en chêne,
- 66 % des planches sont en sapin,
- les autres sont en bois de hêtre.

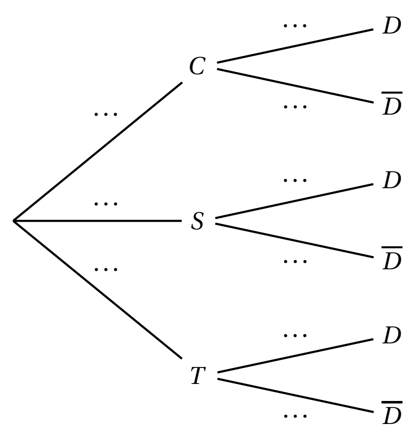
De plus, 46 % des planches en chêne sont déclassées et 25 % des planches en sapin sont déclassées.

On choisit une planche au hasard dans la production de la scierie, et on définit les évènements suivants :

- C : « la planche est en chêne » ;
- S : « la planche est en sapin » ;
- T : « la planche est en bois hêtre » ;
- D : « la planche est déclassée ».

1. **a.** À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(C)$, $P_C(D)$ et $P_S(D)$.

   b. On représente la situation par l'arbre suivant. Recopier l'arbre et compléter les pointillés.



2. Calculer la probabilité que la planche soit en chêne et déclassée.
3. On sait que la scierie produit 32 % de planches déclassées.

   Montrer que $p(T \cap D) = 0,063$.
4. On choisit une planche de la production en bois de hêtre. Quelle est la probabilité qu'elle soit déclassée ?

Partie B

On choisit un lot de 10 planches au hasard, et on suppose que le nombre de planches déclassées dans ce lot peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,32$.

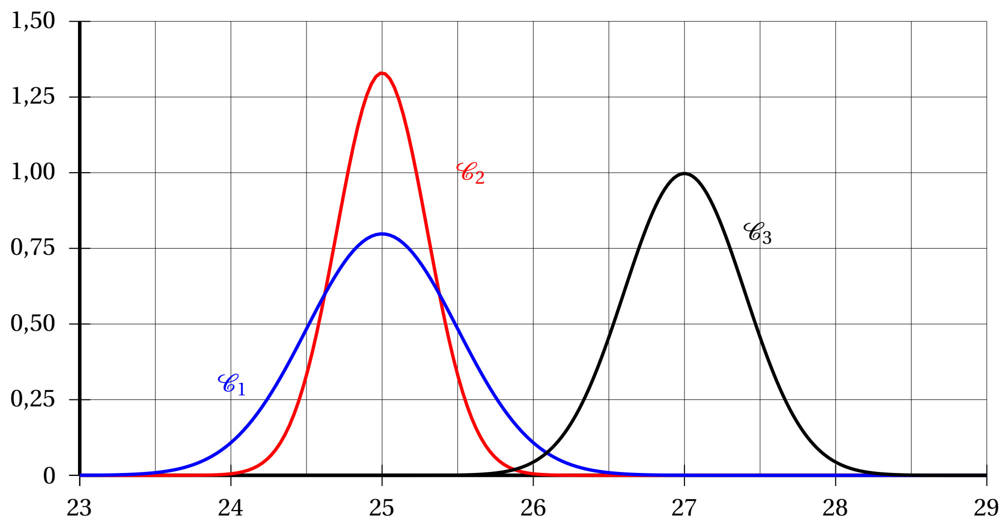
1. Calculer $p(X = 4)$ et interpréter le résultat.

2. Calculer la probabilité qu'au moins une planche du lot soit déclassée.

Partie C

L'épaisseur en millimètre d'une planche de sapin est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu_S = 27$ et d'écart type $\sigma_S = 0,4$.
L'épaisseur en millimètre d'une planche de chêne est modélisée par une variable aléatoire Z qui suit la loi normale d'espérance $\mu_C = 25$ et d'écart type σ_C.
On sait de plus que $\sigma_C > \sigma_S$.

1. Calculer $p(26,5 \leqslant Y \leqslant 27,5)$.
2. Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$ $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessous, l'une représente la densité de probabilité de Y, une autre celle de Z.



   a. Quelle est la courbe représentant la fonction de densité de Y ? Justifier.
   b. Quelle est la courbe représentant la fonction de densité de Z ? Justifier.

3. On sait que la probabilité qu'une planche de chêne ait une épaisseur comprise entre 24 mm et 26 mm est égale à environ 0,95. Donner une valeur approchée de l'écart type σ_C.

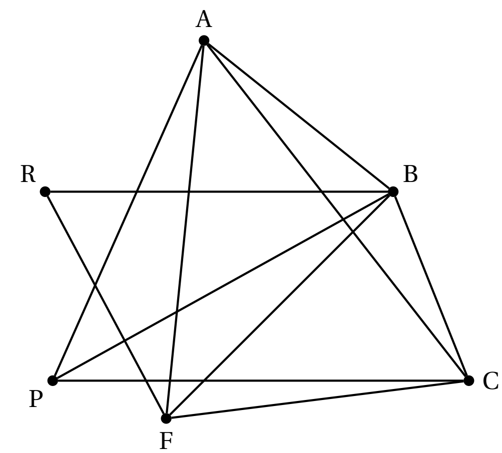
Exercice 3 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi la spécialité ou candidats de L

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)
- Fleamarket (F)

- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

On peut résumer la situation par le graphe ci-dessous :



Les lieux sont représentés par les sommets, et les rues ouvertes à la course par les arêtes.

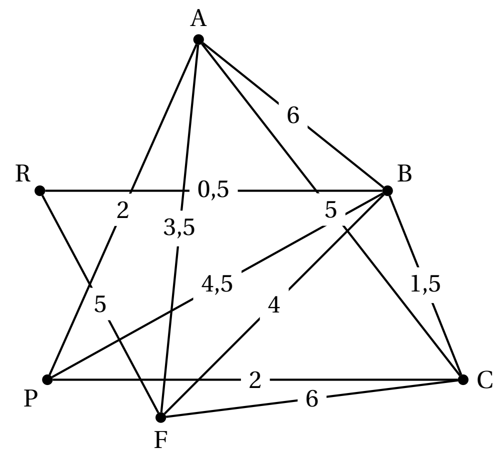
1. **a.** Quel est l'ordre de ce graphe ?
   b. Est-il complet ? Justifier.
   c. Est-il connexe ? Justifier.
2. **a.** L'organisatrice peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues ? Justifier.
   b. Peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit ?
3. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
4. On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 13 & 12 & 13 & 12 & 11 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 12 & 10 & 5 \\ 12 & 12 & 12 & 8 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   Combien de parcours peut-on envisager d'Alexanderplatz au Reichstag passant par exactement 3 rues ?

   Justifier la réponse.
5. L'organisatrice veut également prévoir un autre parcours pour les coureurs moins expérimentés. Ce parcours doit débuter à Alexanderplatz et se terminer au Reichstag.

   Les distances entre les différents lieux sont indiquées en kilomètres sur le graphe ci-dessous.



Déterminer le parcours le plus court possible d'Alexanderplatz au Reichstag. Donner sa longueur.

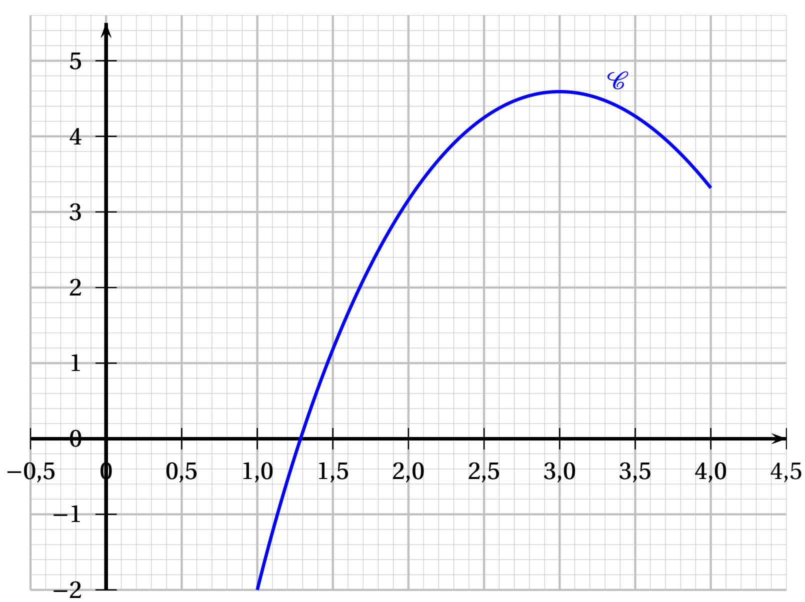
Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,4]$, définie par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 + 6\ln(x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette fonction est donnée dans le repère ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,4]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-2x^2+4x+6}{x}.$$

b. Dresser le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

c. En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1\,;\,4]$. On arrondira les valeurs des images si nécessaire au millième.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,4]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants, qu'on admettra dans la suite :

1	Dériver((-2x ^2+ 4x + 6) / x) $-2-\dfrac{6}{x^2}$
2	Dériver(- x ^3 / 3 + 2x^2-11x + 6x ln (x)) $-x^2+4x-5+6\ln(x)$

a. En utilisant le premier résultat fourni par le logiciel, justifier que la courbe $\mathcal{C}$ est située en-dessous de toutes ses tangentes.

b. En utilisant le deuxième résultat fourni par le logiciel, calculer l'intégrale I définie par :

$$I = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de I.

Partie B

Chaque mois, un prothésiste dentaire produit entre 100 et 400 prothèses.
On admet que lorsque x centaines de prothèses sont fabriquées (avec $1 \leqslant x \leqslant 4$), le bénéfice, en millier d'euros, est donné par $f(x)$, où f est la fonction définie à la partie A.

Utiliser des résultats de la partie A pour répondre aux questions suivantes :

1. Combien de prothèses faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ? Donner ce bénéfice maximal à l'euro près.

2. Combien de prothèses faut-il fabriquer au minimum pour obtenir un bénéfice positif ?

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,4]$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.