Baccalauréat ES (spécialité) Nouvelle-Calédonie mars 2017

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans tout l'exercice, si nécessaire, les résultats seront arrondis au millième.

A l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux.

Partie A

Chaque bouquet spécial fête des Mères est composé uniquement d'oeillets, uniquement de tulipes ou uniquement de marguerites. Chaque bouquet est composé de fleurs d'une même couleur, soit blanches, soit jaunes.
Ce fleuriste a choisi de préparer 60 % de ces bouquets spéciaux avec uniquement des tulipes, 28 % avec uniquement des oeillets, les autres bouquets ne comportant que des marguerites.
On sait d'autre part que :

— la moitié des bouquets confectionnés avec des tulipes sont de couleur jaune ;
— la proportion de bouquets de coloris jaune parmi les bouquets d'oeillets est de un cinquième ;
— parmi les bouquets de marguerites, on compte un quart de jaunes.

Un client entre dans le magasin. et achète au hasard un bouquet parmi les bouquets spéciaux « Fête des Mères ».

On note :

- T l'évènement : « Je bouquet acheté est un bouquet de tulipes » ;
- O l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet d'oeillets » ;
- M l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet de marguerites » ;
- J l'évènement : « les fleurs du bouquet acheté sont jaunes » ;
- B l'évènement : « les fleurs du bouquet acheté sont blanches ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que le client ait acheté un bouquet de tulipes blanches.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement B notée $p(B)$ est égale à $0,614$.
4. Sachant que les fleurs du bouquet acheté par ce client sont blanches, déterminer la probabilité que ce soit un bouquet d'oeillets.

Partie B

L'un des fournisseurs du fleuriste est un jardinier spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.
   a. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres.
   b. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres.
2. Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin ».
   Déterminer la hauteur cherchée (on l'arrondira au mm).

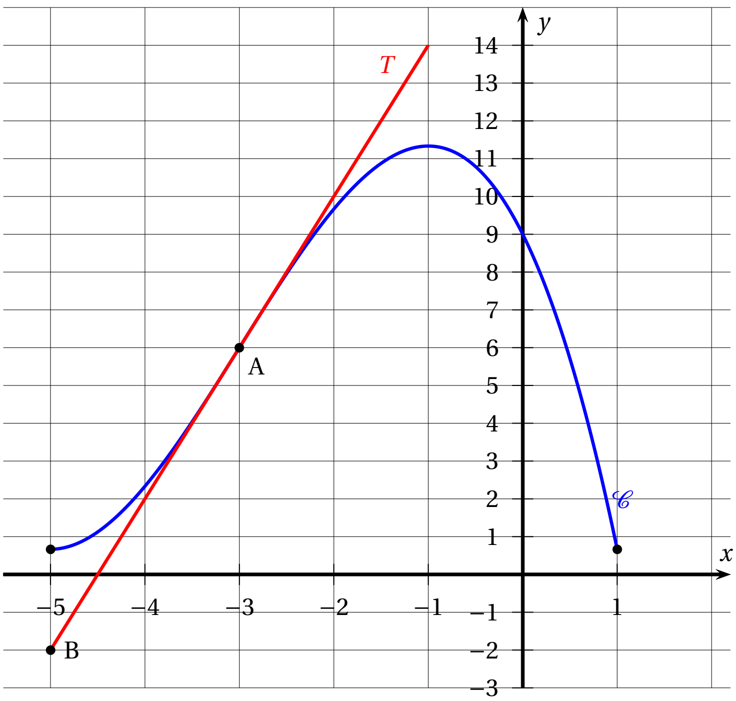
Partie C

En se basant sur les ventes réalisées l'année précédente, cc fleuriste suppose que 85 % de ses clients viendront ce jour-là acheter un des bouquets pour la fête des Mères.
Quelques semaines avant de préparer ses commandes, il décide de vérifier son hypothèse en envoyant un questionnaire à 75 de ses clients, ces derniers étant supposés représentatifs de l'ensemble de sa clientèle.
Les réponses reçues montrent que, parmi les 75 clients interrogés, 16 déclarent qu'ils ne lui achèteront pas de bouquet pour la fête des Mères.
Le fleuriste doit-il rejeter son hypothèse ?

EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question posée, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 1]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A$(-3 ; 6)$ et passe par le point $(-5 ; -2)$.
Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-5 ; 1]$.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Alors :

A. $f'(-3) = 6$ **B.** $f'(-3) = 4$ **C.** $f'(-3) = \dfrac{1}{4}$ **D.** $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. Alors :

A. $f''(-3) = 6$ **B.** $f''(-3) = 4$ **C.** $f''(-3) = 0$ **D.** $f''(-3) = \dfrac{1}{4}$

3. La fonction f est :

A. convexe sur $[-5\ ;\ -3]$ **B.** convexe sur $[-5\ ;\ -1]$
C. convexe sur $[-3\ ;\ 1]$ **D.** concave sur $[-5\ ;\ 1]$

4. La fonction dérivée f est :

A. décroissante sur $[-3\ ;\ -1]$ **B.** croissante sur $[-3\ ;\ -1]$
C. croissante sur $[-1\ ;\ 1]$ **D.** croissante sur $[-5\ ;\ -1]$

5. Toute primitive F de la fonction f est :

A. décroissante sur $[-5\ ;\ 1]$ **B.** croissante sur $[-5\ ;\ 1]$
C. constante sur $[-5\ ;\ 1]$ **D.** décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$

6. On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x$. Alors :

A. $-2 \leqslant I \leqslant 0$ **B.** $-5 \leqslant I \leqslant -4$ **C.** $0 < I \leqslant 2$ **D.** $2 < I < 4$

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les jeunes abonnés (c'est-à-dire de moins de 12 ans) inscrits à une médiathèque se voient proposer une formule d'emprunt mensuel unique : chaque mois, chacun de ces abonnés peut choisir d'emprunter exclusivement soit un livre, soit un film en DVD. On suppose d'une part que le nombre d'inscrits ne varie pas et d'autre part que tous les abonnés de moins de 12 ans respectent cette formule et réalisent un emprunt chaque mois.
Les statistiques réalisées lors des mois précédents sur les choix d'emprunt des jeunes abonnés permettent au responsable de la médiathèque de constater que l'on peut modéliser ainsi la situation :
d'un mois à l'antre,

- 89 % des jeunes abonnés ayant choisi d'emprunter un livre, optent encore pour un livre le mois suivant ;
- parmi les jeunes abonnés ayant emprunté un film, 14 % changent le mois suivant en décidant de choisir un livre.

Lors du lancement de cette formule d'emprunt, en janvier 2016, 80 % des abonnés de moins de 12 ans empruntent un livre.
Chaque mois, on choisit au hasard un abonné de moins de 12 ans de cette médiathèque, et pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que cet abonné emprunte un livre le n-ième mois après janvier 2016 ;
- b_n la probabilité que cet abonné emprunte un film le n-ième mois après janvier 2016 ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième mois après janvier 2016.

Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

1. a. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, où :

- A est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un livre » ;

- B est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un film ».

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, en prenant les sommets A et B dans cet ordre.

c. Déterminer la répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 et en mars 2016.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,14$.

c. Pour déterminer au bout de combien de mois le pourcentage de jeunes abonnés empruntant un livre deviendra pour la première fois strictement inférieur à 60 %, on décide de programmer un algorithme. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'afficher la réponse à cette question.

Initialisation
 a prend la valeur 0,8
 n prend la valeur 1
Traitement
 Tant que $a \geqslant 0,6$
  a prend la valeur $0,85 \times a + 0,14$
 Fin Tant que
Sortie
 Afficher n

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = a_n - 0,56$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75 et préciser son terme initial.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,24 \times 0,75^n + 0,56$.

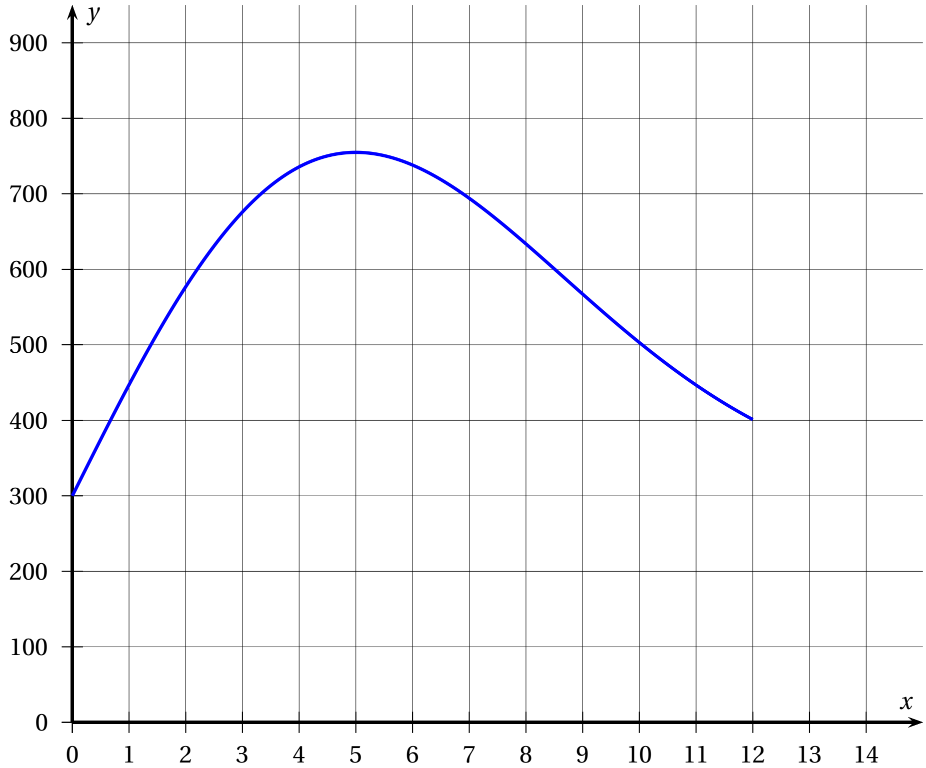
c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $a_n < 0,6$ et interpréter le résultat dans le contexte.

d. À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre ?

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

La directrice d'une association sportive décide de proposer à ses adhérents une randonnée pédestre, longue de 12 km, sur des sentiers de montagne.
Afin que les membres de son association puissent décider de participer ou non à cette randonnée en fonction de leur niveau et de leur condition physique, elle leur envoie le graphique ci-dessous avant de procéder aux inscriptions.
Dans un repère orthogonal, cette courbe représente la fonction f définie sur $[0 ; 12]$ donnant l'altitude du parcours en fonction du nombre de kilomètres effectués depuis le départ.
Ainsi x est la distance parcourue, en kilomètres, depuis le point de départ de la randonnée :
$x \in [0 ; 12]$ et $f(x)$ est l'altitude. en mètres, à laquelle se situe le chemin de randonnée au bout de x km parcourus.



Partie A

Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. À quelle altitude se situent les randonneurs après avoir parcouru 2 kilomètres ?
2. Dans la partie descendante de cette randonnée, l'organisatrice a prévu de faire une pause avec les participants, dans un refuge situé à 600 mètres d'altitude.

   Quelle distance auront-ils alors parcourue depuis le départ ?
3. À la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront-ils revenus à leur point de départ ? Justifier la réponse.

Partie B

Dans toute cette partie, les réponses devront être justifiées.
Aucune lecture graphique ne sera considérée comme une justification valable.

Une modélisation du parcours proposé permet d'affirmer que la fonction f est définie sur $[0\,;\,12]$ par :

$$f(x) = 150x\mathrm{e}^{-0,02x^2} + 300.$$

1. On note f' la dérivée de la fonction f et on admet que :

$$\text{pour tout } x \in [0\,;\,12],\quad f'(x) = \left(150 - 6x^2\right)\mathrm{e}^{-0,02x^2}$$

   Déterminer le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur $[0\,;\,12]$.
2. Quelle sera, au mètre près, l'altitude maximale atteinte par les randonneurs ?

   Au bout de quelle distance parcourue depuis le départ ?

3. L'un des participants de cette randonnée affirme : « Dans ce parcours, nous n'atteindrons qu'une seule fors une altitude de 350 m ».

   Démontrer que cette affirmation est vraie, et donner une valeur approchée, arrondie au mètre près, de la distance qu'auront parcourue les randonneurs depuis le départ pour parvenir à cette altitude.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par :

$$F(x) = 300x - 3\,750\mathrm{e}^{-0,02x^2}.$$

   Montrer que F est une primitive de f.

5. Quelle est la valeur de l'altitude moyenne de la phase d'ascension de cette randonnée ? (Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie au mètre près).