B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2020

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10,
dont l'annexe page 10/10 est à rendre avec la copie.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et
à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité)

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question son numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;+\infty[$.
   Parmi les tableaux suivants, un seul est correct. Déterminer lequel.

a)

x	-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	

b)

x	-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	

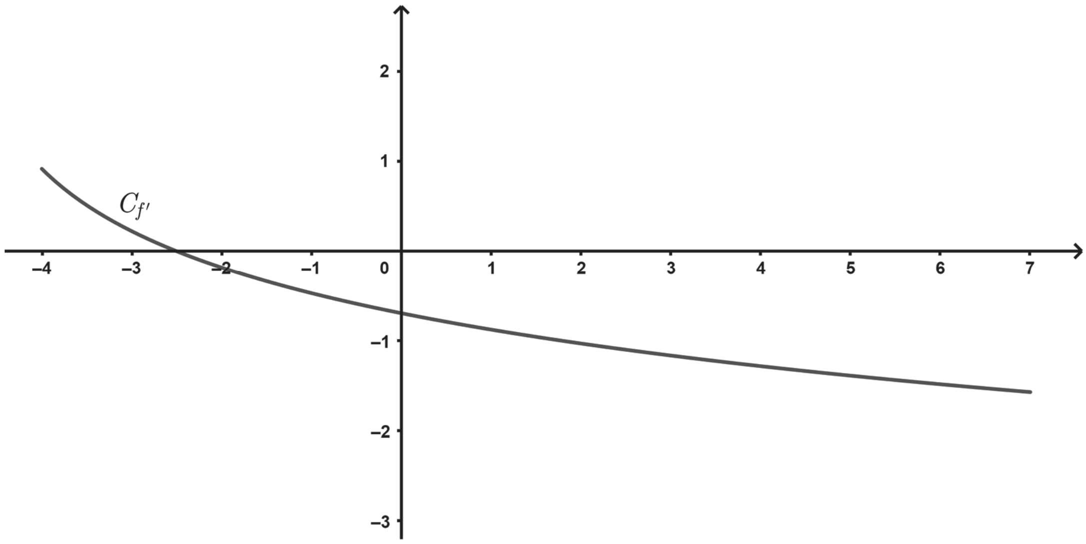
c)

x	-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	3	$\searrow$	5	$\nearrow$	

d)

x	-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	5	$\nearrow$	3	$\searrow$	

2. On donne ci-dessous la représentation graphique $C_{f'}$ de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.



a) f est décroissante sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.

b) f' est négative sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.

c) f'' est décroissante sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.

d) f'' est négative sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.

Dans la suite de l'exercice, pour tous événements E et F, on note $p(E)$ la probabilité de E et, si F est de probabilité non nulle, $p_F(E)$ la probabilité de E sachant F.

3. Soit U la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[-10\,;40]$.

a) La fonction de densité f associée à U est définie sur l'intervalle $[-10\,;40]$ par $f(x) = \frac{1}{30}$.

b) $p_{(U\geq 20)}(U \geq 30) = p(U \geq 10)$

c) $p(-5 \leq U \leq 20) = p(-3 \leq U \leq 22)$

d) L'espérance de U est égale à 25.

4. Soit Z la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart type $\sigma = 2$.
On a :

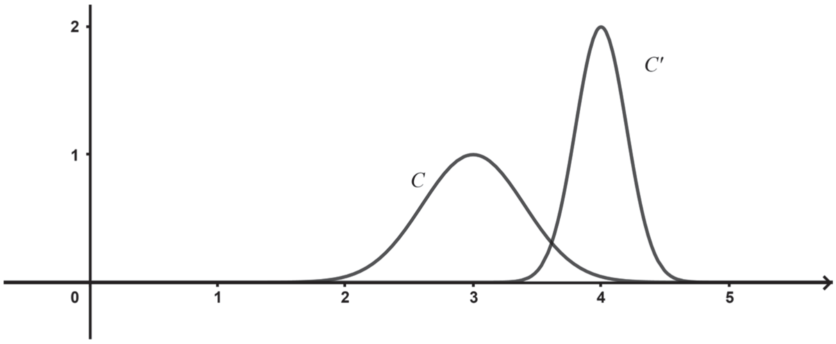
a) $p(8 \leq Z < 12) \approx 0{,}092$

b) $p(Z = 13) \approx 0{,}121$

c) $p(Z < 12) \approx 0{,}067$

d) La valeur arrondie au millième du réel a tel que $p(Z \leq a) \approx 0{,}9$ est égale à $1{,}282$.

5. Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.
Soit Y la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ' et d'écart type σ'.
Sur le graphique ci-dessous, C est la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X, et C' est la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Y.



D'après le graphique, on a :

a) $\mu < \mu'$ et $\sigma < \sigma'$

b) $\mu > \mu'$ et $\sigma < \sigma'$

c) $\mu > \mu'$ et $\sigma > \sigma'$

d) $\mu < \mu'$ et $\sigma > \sigma'$

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Une étude statistique sur le marché du jeu en ligne a été effectuée pour les années 2017 et 2018.

Année	2017	2018
Chiffre d'affaires annuel mondial du marché du jeu en ligne en millions de dollars	45	66

Source : Statista

1. Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à l'unité, du chiffre d'affaires entre 2017 et 2018.

Durant l'année 2019, l'arrivée de nouveaux acteurs sur le marché laisse prévoir une extension accélérée du jeu en ligne.

On modélise alors le chiffre d'affaires du marché du jeu en ligne par la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$c_{n+1} = 1{,}28c_n + 250{,}6$$

où le terme c_n représente une estimation du chiffre d'affaires en million de dollars pour l'année $2018 + n$.
Le chiffre d'affaires pour l'année 2018 est donné par $c_0 = 66$.

2. Avec cette modélisation, calculer en million de dollars arrondi au dixième, le chiffre d'affaires prévu pour le marché du jeu en ligne pour l'année 2020.

3. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n, $v_n = c_n + 895$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

      Préciser sa raison et son premier terme.

   b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de v_n en fonction de n.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 961 \times 1{,}28^n - 895$.

4. On considère l'algorithme ci-contre.

```
c ← 66
S ← 66
Pour i allant de 1 à n
    c ← 1,28c + 250,6
    S ← S + c
Fin Pour
```

On choisit $n = 4$.

a) Recopier puis compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à l'unité.

Valeur de i		1	2	3	4
Valeur de c	66	335			
Valeur de S	66	401			

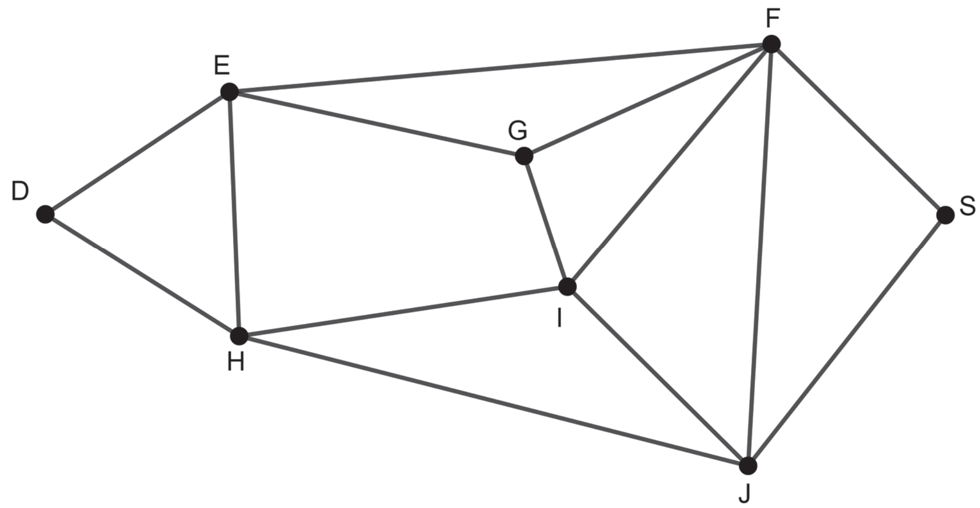
b) Après exécution de l'algorithme, quelle est la valeur de S obtenue, arrondie à l'unité, pour $n = 4$?

c) Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice de la valeur de S obtenue à la question précédente.

Exercice 3 (5 points)
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Un club cycliste se prépare pour une compétition.

Le graphe ci-dessous représente l'ensemble des routes empruntables le jour de la compétition : les arêtes représentent les routes et les sommets représentent des points de passage.



1. Justifier que ce graphe est connexe.
2. a) Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule ? Justifier.

   b) Si un tel trajet existe, en citer un.

3. Soit M la matrice d'adjacence de ce graphe pour laquelle les sommets sont cités dans l'ordre alphabétique : D, E, F, G, H, I, J, S.

   a) On donne

$$M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

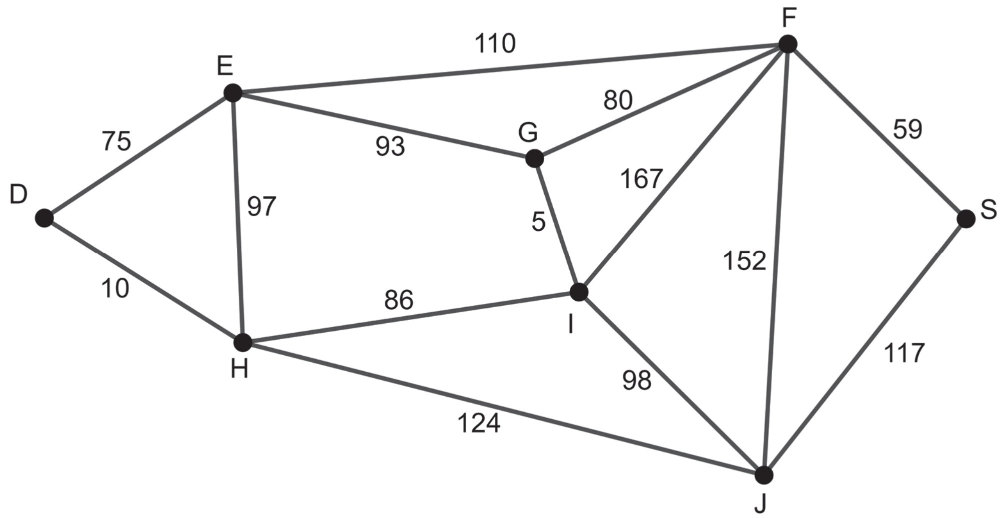
   Il manque certains coefficients de la matrice M . Recopier et compléter uniquement la partie manquante de M.

b) On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 8 & 6 & 12 & 11 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & 9 & 10 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 6 & 9 & 9 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Un cycliste souhaite aller du point D au point F en empruntant trois routes.
Combien d'itinéraires différents sont possibles ?
Donner la liste complète.

4. Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le temps, en minute, mis par un des cyclistes pour parcourir chacune des routes.



Afin de gagner la compétition, il doit choisir le trajet le plus rapide reliant le point D au point S.
Déterminer, en utilisant un algorithme, ce trajet minimal et préciser la durée, en minute, puis en heure de ce trajet.

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

La courbe C_f , donnée en **annexe**, est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 9]$.
La droite T est la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.
Le domaine grisé, noté $\mathcal{D}$, est délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Partie A : Étude graphique

1. a) Avec la précision permise par le graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.

   b) Le nombre dérivé de f en 1 est 2. Tracer sur l'**annexe**, à rendre avec la copie, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

2. Résoudre graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'équation $f(x) = 0$.

3. a) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ grisé à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

   b) En utilisant les éléments du graphique, donner un encadrement par deux entiers consécutifs, de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ grisé en unités d'aire.

Partie B : Étude algébrique

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 9]$ par $f(x) = 4\ln(x) + 5 - 2x$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 9]$, $f'(x) = \frac{2(2-x)}{x}$.

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 9]$.

   b) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 9]$.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 9]$.

   b) Donner à l'aide la calculatrice un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. a) Montrer que la fonction F définie par :

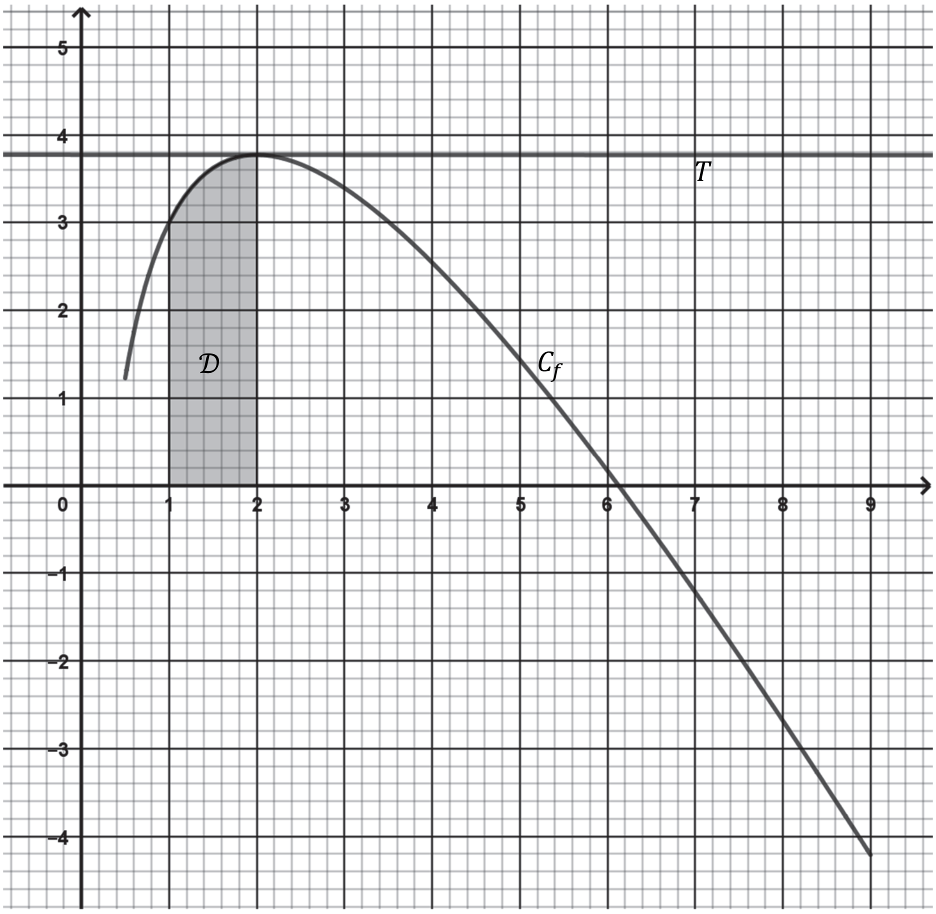
$$F(x) = -x^2 + 4x\ln(x) + x$$

   est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;9]$.

   b) En déduire la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisé $\mathcal{D}$, en unité d'aire.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Modèle CMEN-DOC v3 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)