

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

**MATHÉMATIQUES**

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** — COEFFICIENT : **7**

***Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 (5 points)

### Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à  $10^{-4}$  près.

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
  - a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
  - b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
  - c. L'ampoule tirée est sans défaut.  
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.  
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

#### Partie B

1. On rappelle que si  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif  $a$ ,  $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$ .
  - a. Montrer que  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .
  - b. Montrer que si  $T$  suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs  $t$  et  $a$  on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
  - a. Déterminer la valeur exacte du paramètre  $\lambda$  de cette loi.
  - b. Calculer la probabilité  $P(T \geq 5\,000)$ .
  - c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

### Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

### Exercice 2 (3 points)

#### Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z - 2| = 1$ .

1. Justifier que  $\mathcal{C}$  est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit  $a$  un nombre réel. On appelle  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = ax$ .  
Déterminer le nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  en fonction des valeurs du réel  $a$ .

### Exercice 3 (7 points)

#### Commun à tous les candidats

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

1. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

*Indication : on pourra utiliser que pour tout réel  $x$  différent de 0,  $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .*

On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à 0.

2.

- a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et on note  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que pour tout réel  $x$ ,

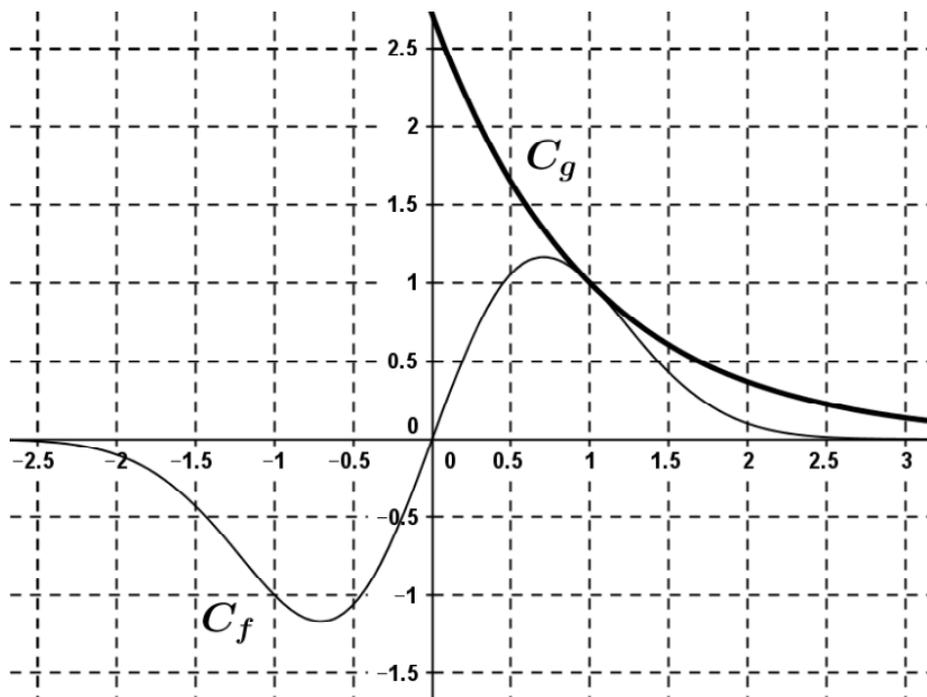
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives  $C_f$  et  $C_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] - \infty ; 0]$ ,  $f(x) < g(x)$ .
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On pose, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ .

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que  $f(x) = g(x)$  équivaut à  $\Phi(x) = 0$ .

- b. On admet que la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Dresser le tableau de variations de la fonction  $\Phi$ . (Les limites en 0 et  $+\infty$  ne sont pas attendues.)
  - c. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) \leq 0$ .
- 4.
- a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
  - b. Montrer que  $C_f$  et  $C_g$  ont un unique point commun, noté A.
  - c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

### Partie C

1. Trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

### Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

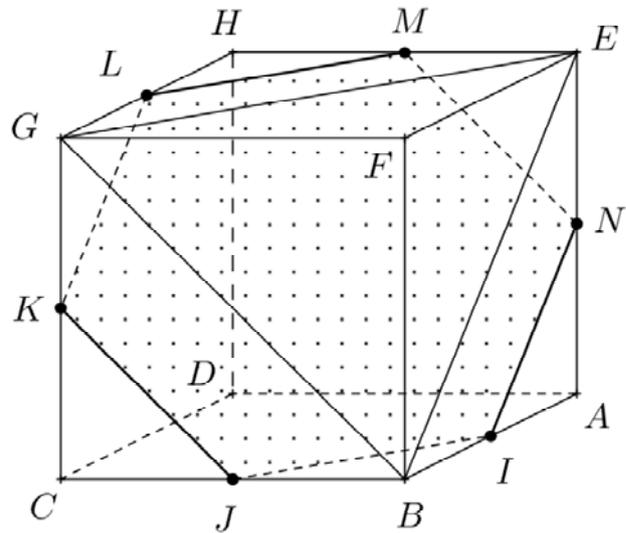
$ABCDEFGH$  est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé  $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$ .

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$ ,  $C(1; 0; 0)$ ,  $A(0; 1; 0)$ ,  
 $H(0; 0; 1)$  et  $E(0; 1; 1)$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ .



Soit  $\mathcal{P}$  le plan parallèle au plan  $(BGE)$  et passant par le point  $I$ .

On admet que la section du cube par le plan  $\mathcal{P}$  représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets  $I, J, K, L, M$  et  $N$  appartiennent respectivement aux arêtes  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CG]$ ,  $[GH]$ ,  $[HE]$  et  $[AE]$ .

1.
  - a. Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{DF}$  est normal au plan  $(BGE)$ .
  - b. En déduire une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .
2. Montrer que le point  $N$  est le milieu du segment  $[AE]$ .
3.
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(HB)$ .
  - b. En déduire que la droite  $(HB)$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont sécants en un point  $T$  dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre  $FBGE$ .