Baccalauréat S Métropole–La Réunion 12 septembre 2016

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

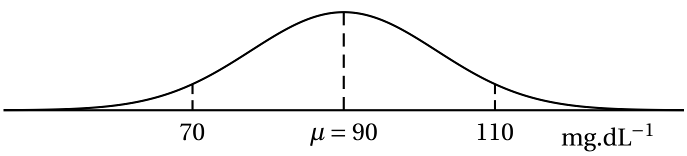
Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
   b. La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.
2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**
Commun à tous les candidats

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6

   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                   | entre 1 et 6
                   | Si d ⩽ 2
                   |      | alors a prend la valeur 1 − a
                   |      | sinon Si d ⩽ 4
                   |      |          | alors b prend la valeur 1 − b
                   |      |        FinSi
                   | FinSi
                   | s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1er passage boucle Pour					
2e passage boucle Pour					
3e passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

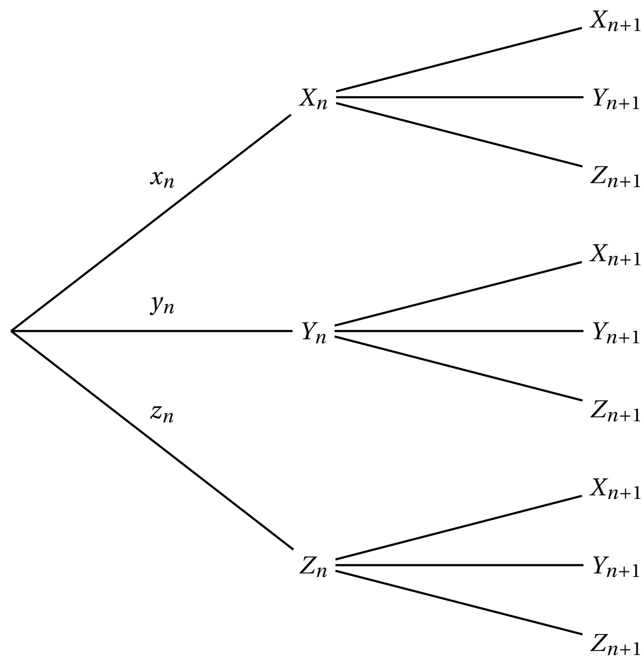
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$.

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.
Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n$.
Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.
Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.
Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

```
Variables :        a, b, c, d, s sont des entiers naturels
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   c prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                     d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                     entre 1 et 6
                     Si d ⩽ 2
                        alors a prend la valeur 1 − a
                        sinon Si d ⩽ 4
                                  alors b prend la valeur 1 − b
                                  sinon c prend la valeur 1 − c
                              FinSi
                     FinSi
                     s prend la valeur a + b + c
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	c	s
initialisation						
1er passage boucle Pour						
2e passage boucle Pour						
3e passage boucle Pour						

b. Cet algorithme permet-il de savoir si, après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile ?

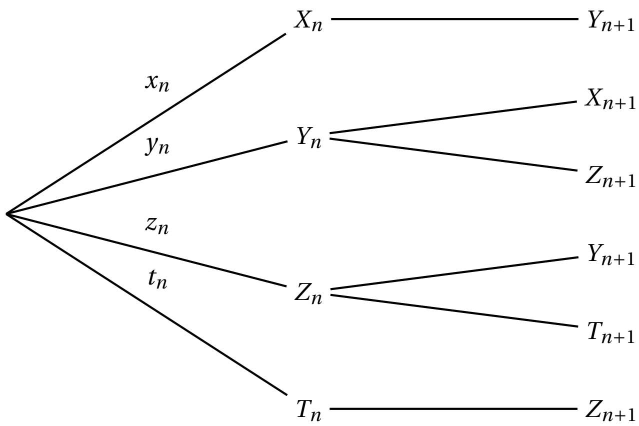
2. Pour tout entier naturel n, on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
- T_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$; $z_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

a. Donner les probabilités x_0 ,y_0, z_0 et t_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1, 2 ou 3 pièces du côté pile.

b. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches :



3. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice ligne $\left(x_n\, y_n\, z_n\, t_n\right)$.

a. Donner la matrice U_0.

b. À l'aide de l'arbre précédemment rempli, déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 \times M^n$.

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{(-1)^n + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}\,;\\
y_n &= \frac{-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n \times 3 + 3}{8}\,;\\
z_n &= \frac{-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n \times 3 + 3}{8}\,;\\
t_n &= \frac{-(-1)^n + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}.
\end{aligned}$$

a. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile.

b. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte

- Première affirmation :

« À l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».

- Deuxième affirmation :

« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\dfrac{1}{4}$ ».

- Troisième affirmation :

« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $0,249$ ».

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Commun à tous les candidats

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.
2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

   On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

   Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right).$$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.
2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.
3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

   On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

   $$d(T) = \int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$, $d(T) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$.

   b. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.
4. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.