∽ Baccalauréat S (obligatoire) – Nouvelle Calédonie ∾
février 2020

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **6 points**

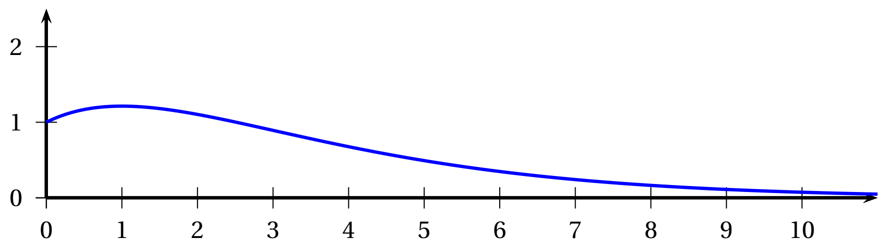
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$$

où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.
2. Démontrer que, pour tout réel positif x, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b + a\right)\mathrm{e}^{-2x}$.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

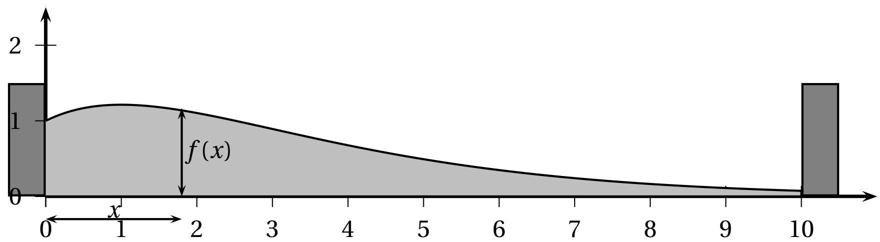
1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif, $f(x) = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$,
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}07$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Donner l'arrondi de α à l'unité.

Partie C - Modélisation d'un tas de sable

Dans cette partie, on considère que la courbe de la fonction f modélise le profil d'un tas de sable. La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en mètres.
Ainsi, le fait que $f(0) = 1$ signifie qu'à son extrémité gauche, la hauteur du tas de sable est de 1 mètre.
On souhaite que le tas de sable soit limité par deux murs comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Le mur de gauche coïncide avec l'axe des ordonnées et le mur de droite est placé de telle sorte que la hauteur de sable à cet endroit est de 7 cm.



1. Pourquoi le mur de droite doit-il être placé à environ 10 mètres du mur de gauche ?

2. Vérifier que la fonction G définie sur $[0\,;\,10]$ par $G(x) = (-2x - 4)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0\,;\,10]$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

3. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

4. Pour pouvoir créer un terrain de sport sur sable, on décide de niveler le tas de sable, c'est-à-dire de l'étaler à une même hauteur entre les deux murs.

Quelle sera la hauteur du tas de sable une fois le nivellement réalisé ? Expliquer le raisonnement et arrondir le résultat au centimètre.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les probabilités seront arrondies si nécessaire au millième.

Partie A

Une antenne relais chargée d'acheminer des communications est exploitée par trois opérateurs : l'opérateur A, l'opérateur B et l'opérateur C.
Par ailleurs, cette antenne utilise deux types de canal : le canal vocal (pour les communications téléphoniques) et le canal internet (pour les communications par texto ou par mail).
On dispose des données suivantes :

- 40 % des communications passent par l'opérateur A ;
  25 % des communications passent par l'opérateur B ;
- 10 % des communications passant par l'opérateur A utilisent le canal vocal ;
- 20 % des communications passant par l'opérateur B utilisent le canal vocal ;
- 20 % de l'ensemble des communications utilisent le canal vocal.

On choisit une communication au hasard et on considère les évènements :

- A : « la communication passe par l'opérateur A » ;
  B : « la communication passe par l'opérateur B » ;
- C : « la communication passe par l'opérateur C » ;
- V : « la communication utilise le canal vocal ».

1. À l'aide des valeurs de l'énoncé, compléter les pointillés indiqués sur les branches de l'arbre pondéré donné en **ANNEXE** à rendre avec la copie.
2. Calculer la probabilité que la communication passe par l'opérateur A et utilise le canal vocal.
3. La communication passe par l'opérateur C. Quelle est la probabilité qu'elle soit acheminée par le canal vocal ?

Partie B

Cette antenne relais couvre une zone géographique bien définie appelée cellule. Dans cette cellule, les ressources radio sont limitées à 350 appels simultanés. Cela signifie qu'au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée.
Dans cette cellule, 1 600 personnes possèdent chacune un téléphone mobile.
À un instant donné, on choisit au hasard une personne parmi les 1 600 personnes de la cellule.
On admet que la probabilité que cette personne passe un appel téléphonique est égale à 0,2.
On admet en outre que les 1 600 personnes de la cellule agissent indépendamment les unes des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? On précisera ses paramètres.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que l'antenne ne soit pas saturée.

Partie C

On considère une autre cellule dans laquelle le nombre de personnes passant un appel téléphonique au même moment est modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance $\mu = 335$ et d'écart-type σ inconnu,

1. On a constaté que, dans cette cellule, la probabilité que l'antenne soit saturée est 0,001 5.
   On rappelle que l'antenne est saturée lorsque le nombre de personnes passant un appel téléphonique au même moment est supérieur à 350.
   a. Sur l'**ANNEXE** à rendre avec la copie, on a réalisé un croquis donnant l'allure de la courbe de la fonction densité de la variable aléatoire Y.
   Hachurer sur cette annexe le domaine correspondant à la probabilité que l'antenne soit saturée.
   b. Justifier que la valeur de σ, arrondie à l'unité, vaut 5.
2. L'antenne dispose d'un mode « économie d'énergie » qui s'active lorsque moins de 330 personnes passent un appel téléphonique au même moment.
   Calculer la probabilité que l'antenne soit en mode « économie d'énergie ».

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les PARTIES A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

On considère l'équation suivante :

$$(E): \quad z^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)z^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right)z - 8 = 0,$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$(z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)=z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)z-8.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) en donnant ses solutions sous forme algébrique.
3. Écrire toutes les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

PARTIE B

Dans cette partie, on cherche à déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points A et B du plan complexe d'affixes respectives $z_\text{A}=2$ et $z_\text{B}=2\,\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ et I le milieu du segment [AB] d'affixe z_I.

1. Démontrer que le triangle OAB est un triangle isocèle.
2. Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{\text{OI}}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{8}$.
3. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_I puis le module de z_I.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0=6 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1.$$

Affirmation 1 : Pour tout entier naturel n, $u_n=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4$.

2. Soit (t_n) une suite géométrique de premier terme $t_0=2$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.
On appelle S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (t_n), soit $S_n=t_0+t_1+\ldots+t_n$.
Affirmation 2 : La suite (S_n) a pour limite $+\infty$.
3. On définit la suite (c_n), pour tout entier naturel n non nul, par

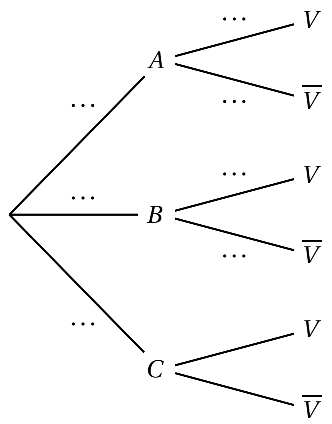
$$c_n=1+\frac{\cos(n)}{n}.$$

Affirmation 3 : La suite (c_n) est convergente.

4. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère les points A(1 ; 2 ; 0), B(3 ; 0 ; 6), C(6 ; −1 ; 9) et D(−4 ; 4 ; −6).
Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
5. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A(1 ; 2 ; 0) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(6\,;\,4\,;\,-1)$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1\\ y &=& -t-1\\ z &=& 2t+3\end{array}\right.,\ t\in\mathbf{R}$.
Affirmation 5 : Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ne possèdent aucun point commun.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2 : PARTIE A



Exercice 2 : PARTIE C