Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + \text{i}y$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+\text{i})^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a. $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\pi}$

b. $4\text{e}^{\text{i}\pi}$

c. $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

d. $4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x+\text{i}y$ tels que $|z-1+\text{i}| = \left|\sqrt{3}-\text{i}\right|$ a pour équation :

a. $(x-1)^2+(y+1)^2 = 2$

b. $(x+1)^2+(y-1)^2 = 2$

c. $(x-1)^2+(y+1)^2 = 4$

d. $y = x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1+\text{i}$ et $Z_{n+1} = \frac{1+\text{i}}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

a. Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b. Pour tout entier naturel n, le triangle $\text{O}M_nM_{n+1}$ est équilatéral.

c. La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

d. Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_\text{A} = -1-\text{i} \quad ; \quad Z_\text{B} = 2-2\text{i} \quad \text{et} \quad Z_\text{C} = 1+5\text{i}.$$

On pose $Z = \dfrac{Z_\text{C}-Z_\text{A}}{Z_\text{B}-Z_\text{A}}$.

a. Z est un nombre réel.

b. Le triangle ABC est isocèle en A.

c. Le triangle ABC est rectangle en A.

d. Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\ 1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?
2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\ +\infty[$.
5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?
2. Montrer que $p(B \cap D) = 0{,}0224$.
3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,000 00	0,000 04	0,001 65	0,025 06	0,163 68
Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	0,836 32	0,974 94	0,998 35	0,999 96

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.
Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?
   b. Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
   c. Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

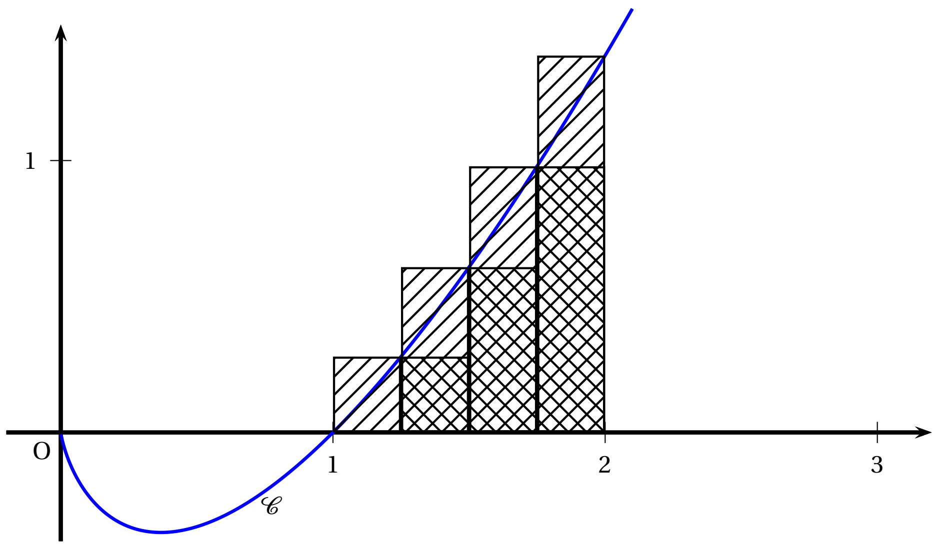
Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. **a.** Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

   b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

   c. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{array}{lcl} U_n & = & \dfrac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n & = & \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right) + f(2)\right] \end{array}.$$

   On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$.

   a. Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.

   b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

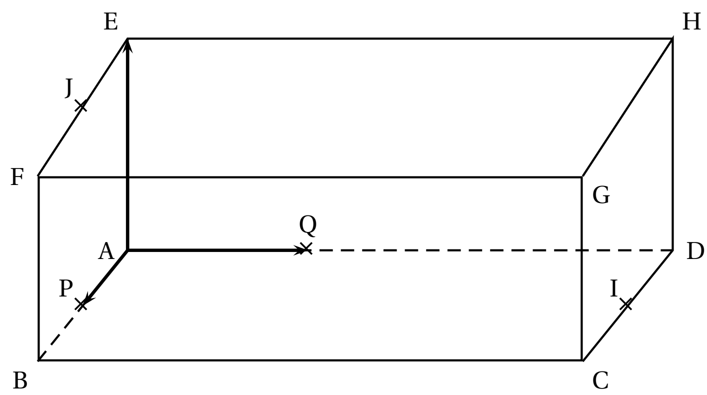
1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{\text{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AP}},~\overrightarrow{\text{AQ}},~\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].

4. **a.** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1\\ y &=& t\\ z &=& 3t-4\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$.

d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.