Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 17 novembre 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

*Les trois parties **A, B** et **C** sont indépendantes*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

   Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104\ ;\ 116]$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.
Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions **1.** et **2.**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+\text{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

   $$z-\overline{z}+2-4\text{i}=0$$

   admet une solution unique.
3. **Affirmation 3 :**
   $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right)+\dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)}=\dfrac{\text{e}^{\ln 2+\ln 3}}{\text{e}^{\ln 3-\ln 4}}$
4. **Affirmation 4 :**
   $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}\,\text{d}x=-\ln\left(\frac{3}{5}\right)$
5. **Affirmation 5 :**
   L'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On donne les points A$(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, C$(-5\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et D$(11\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

   b. Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.

   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   En déduire une équation cartésienne de ce plan.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+y+4z-8=0$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).

   b. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (BD).

   c. Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

   où α est le réel défini dans la question 2.

   b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

   a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

   b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

   c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier Les variables d'entrées A et B
Traitement :	
	Affecter à D la valeur de $B - A$

	Tant que $D > 0$
	B prend la valeur de A
	A prend la valeur de D
	    Si $B > A$ Alors
	        D prend la valeur de $B - A$
	    Sinon
	        D prend la valeur de $A - B$
	    Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.
   En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.
2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.
   En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.
   a. Justifier qu'il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

   $$\text{(E)} \qquad 221x - 331y = 1.$$

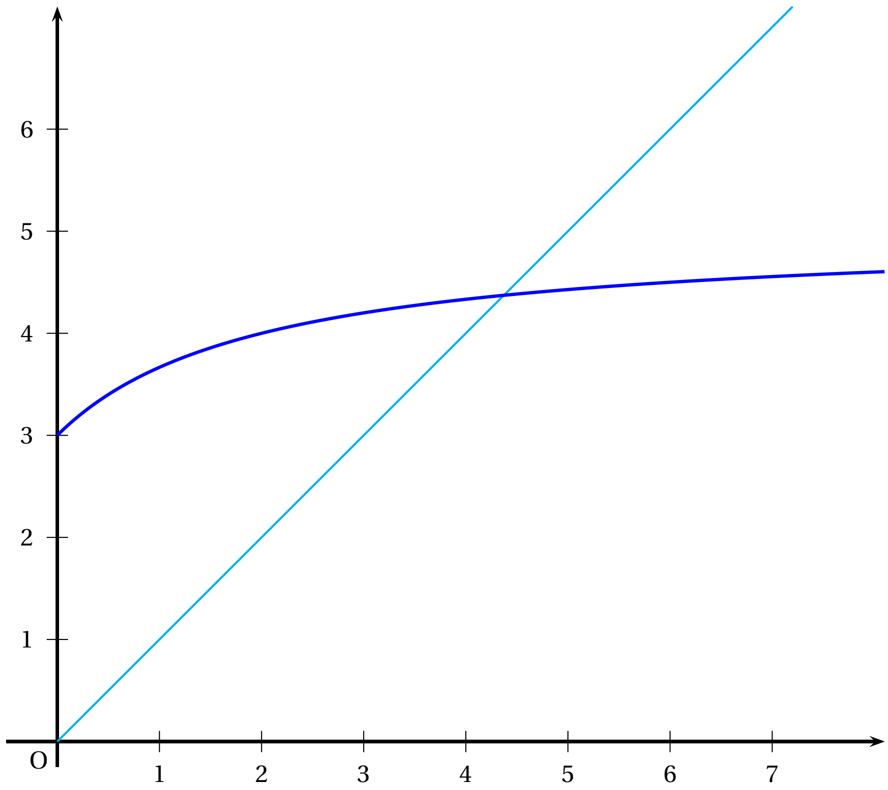
   b. Vérifier que le couple (3 ; 2) est une solution de l'équation (E).
   En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

   $$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{array}\right.$$

   a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.
   b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p ; q)$ tels que
   $u_p = v_q, \quad 0 \leqslant p \leqslant 500 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q \leqslant 500.$

Annexe 1 de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Annexe 2 de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur ...
	Affecter à s la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.

Annexe de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	B	D
12	14	