Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie
26 novembre 2019

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la vente de carrelage.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

On suppose dans cette partie que l'entreprise vend des lots de carrelage contenant 25 % de carreaux avec motif et 75 % de carreaux blancs.
Lors d'un contrôle qualité on observe que :

- 2,25 % des carreaux sont fissurés ;
- 6 % des carreaux avec motif sont fissurés.

On prélève au hasard un carreau.
On note M l'évènement « le carreau a un motif » et F l'évènement « le carreau est fissuré ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. On sait que le carreau prélevé est fissuré.
   Démontrer que la probabilité qu'il s'agisse d'un carreau avec motif est $\dfrac{2}{3}$
3. Calculer $P_{\overline{M}}(F)$, probabilité de F sachant $\overline{M}$.

Partie B

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ.
Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre 10,1 mm et 11,9 mm.
On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

1. Démontrer que $P(X < 10,1) = 0,005$.
2. On introduit la variable aléatoire Z telle que

$$Z = \frac{X - 11}{\sigma}.$$

   a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z.

   b. Démontrer que $P\left(Z \leqslant -\frac{0,9}{\sigma}\right) = 0,005$.

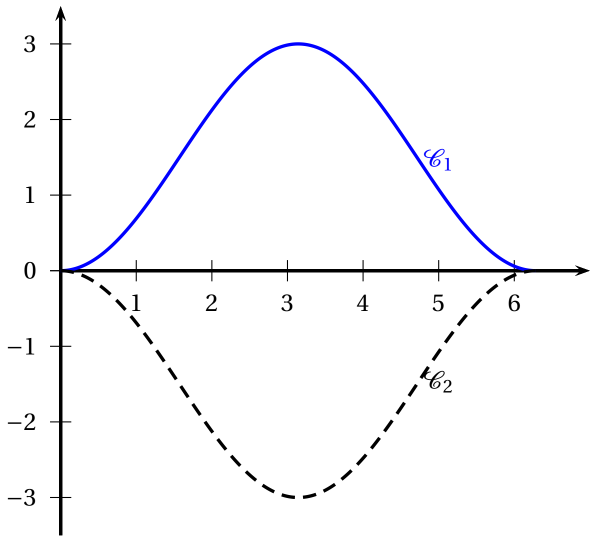
   c. En déduire la valeur de σ arrondie au centième.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0~;~2\pi]$ par

$$f(x) = -1{,}5\cos(x) + 1{,}5$$

On admet que la fonction f est continue sur $[0~;~2\pi]$.
On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Démontrer que la fonction f est positive sur $[0~;~2\pi]$.

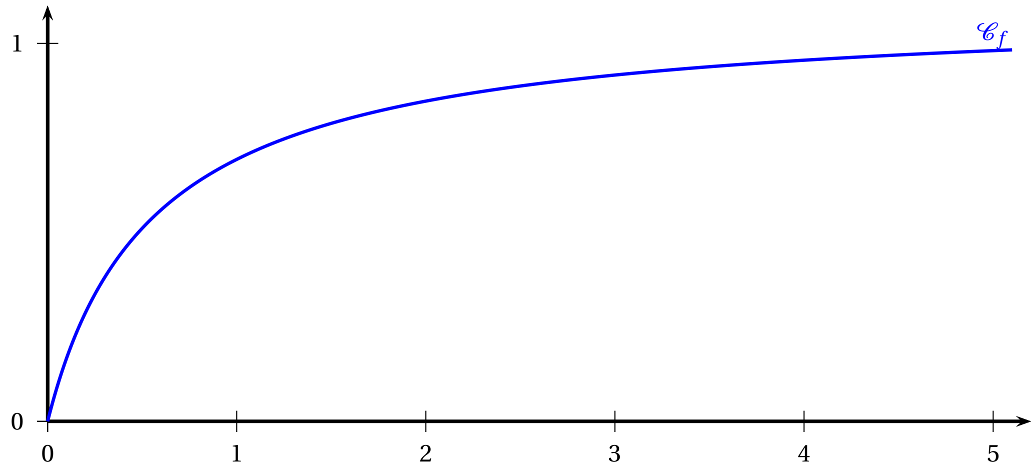
2. Sur la figure ci-dessus, la courbe tracée en tiretés, notée $\mathscr{C}_2$, est la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On note $\mathscr{A}$ son aire, exprimée en unité d'aire.
Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0~;~+\infty[$ où $x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0 ↗	$g(x_0)$	↘ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

2.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

```
x ← 0,22
Tant que ......... faire
        x ← x + 0,01
Fin de Tant que
```

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].
La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

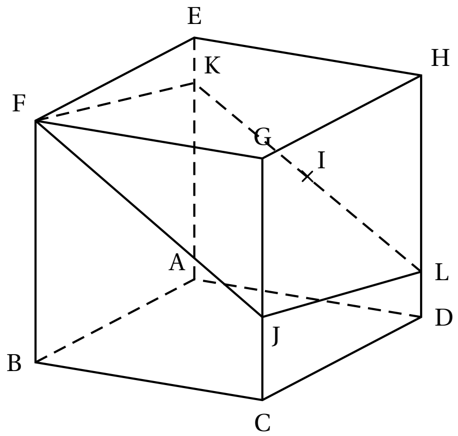


Figure 1

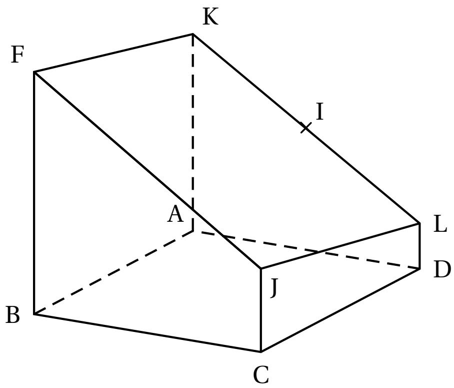


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On a donc A$(0\,;\,0\,;\,0)$, B$(1\,;\,0\,;\,0)$, D$(0\,;\,1\,;\,0)$ et E$(0\,;\,0\,;\,1)$.
Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$

1. Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est

$$-x+3y+5z-4=0.$$

2. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).
Démontrer que M$\left(\dfrac{6}{7}\,;\,\dfrac{3}{7}\,;\,\dfrac{5}{7}\right)$.

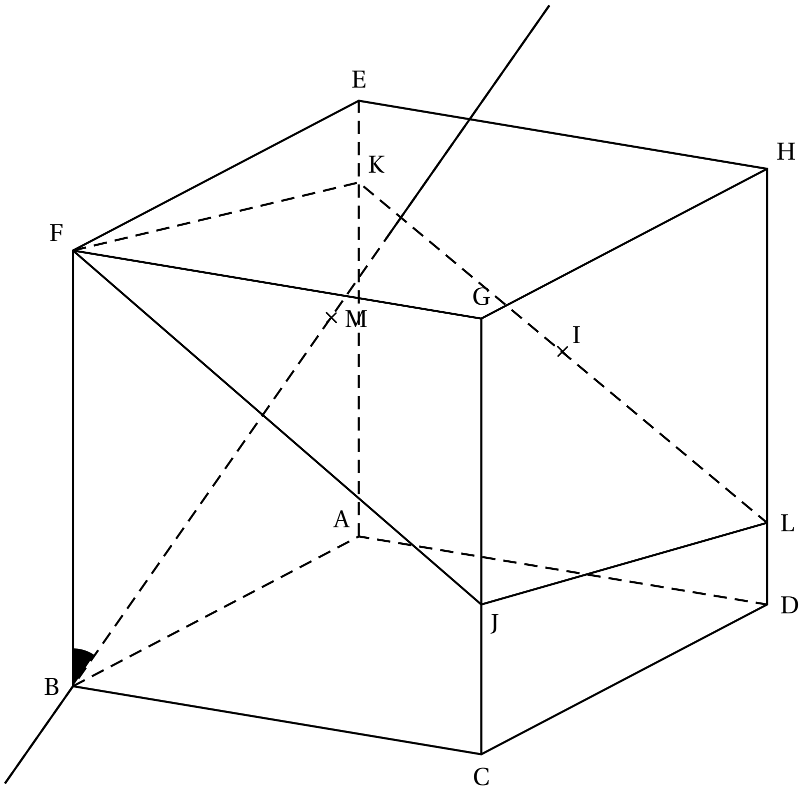


Figure 1

3. **a.** Calculer $\overrightarrow{\text{BM}}.\overrightarrow{\text{BF}}$.

   b. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{\text{MBF}}$.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc $(1\,;\,1\,;\,a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.
2. On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère l'équation (E) :

$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

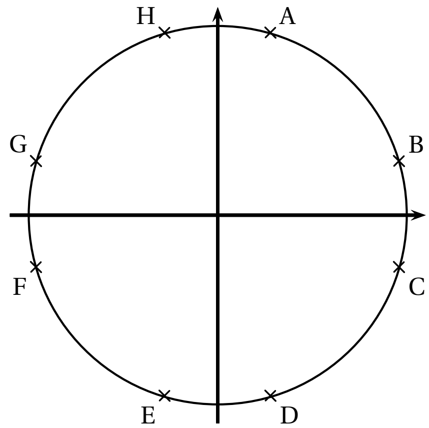
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions sous forme algébrique.

2. Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.
3. On note α le réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de α.

4. La figure ci-contre fait apparaître huit points du cercle unité. Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?



Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation A** :

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = 1.$$

2. Soit z le nombre complexe $\dfrac{1}{6}(2+5\mathrm{i})$.

Affirmation B :

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0.$$

3. On rappelle que, pour tout nombre réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Affirmation C :

Pour tout nombre réel a de $[-\pi\,;\,0]$ tel que $\cos(2a) = \dfrac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\dfrac{3}{5}$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}.$$

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel.
4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).
   a. Pour tout entier naturel n, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, d_n est égal à 1 ou à 3.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} \equiv a_n$ [3].

c. Vérifier que $a_0 \equiv 1\ [3]$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.

d. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

5. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre a_n n'est pas premier.

On pose, pour tout entier naturel n,

$$b_n = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1.$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5a_n = b_n c_n.$$

a. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5 \text{ divise } b_n \quad \text{ou} \quad 5 \text{ divise } c_n.$$

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

c. En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.