∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015 ∾

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0~;~+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. **a.** On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
   Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

   b. Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
   On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.
   a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0~;~\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.
   On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}~;~+\infty\right[$.
   b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2\text{e}}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ?

Justifier.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a. Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

b. Calculer la valeur de λ.

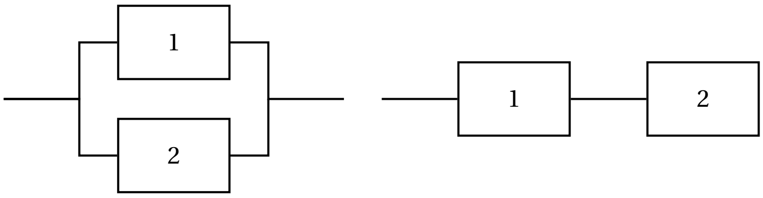
c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près.

Interpréter ce résultat.

d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



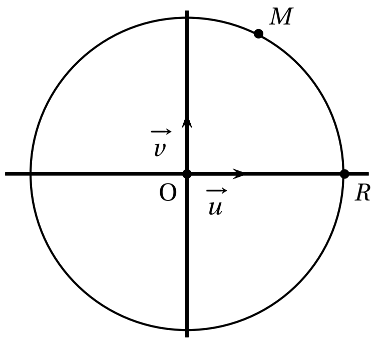
Circuit en parallèle A   Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

EXERCICE 3 **4 POINTS**
Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3. On suppose désormais que z_0n'est pas un nombre réel.

  a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

  b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement	: Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b

Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	    Affecter à a le nombre b
	    Affecter à b la valeur de c
	    Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.

c. Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.

  d. Décoder la lettre R.

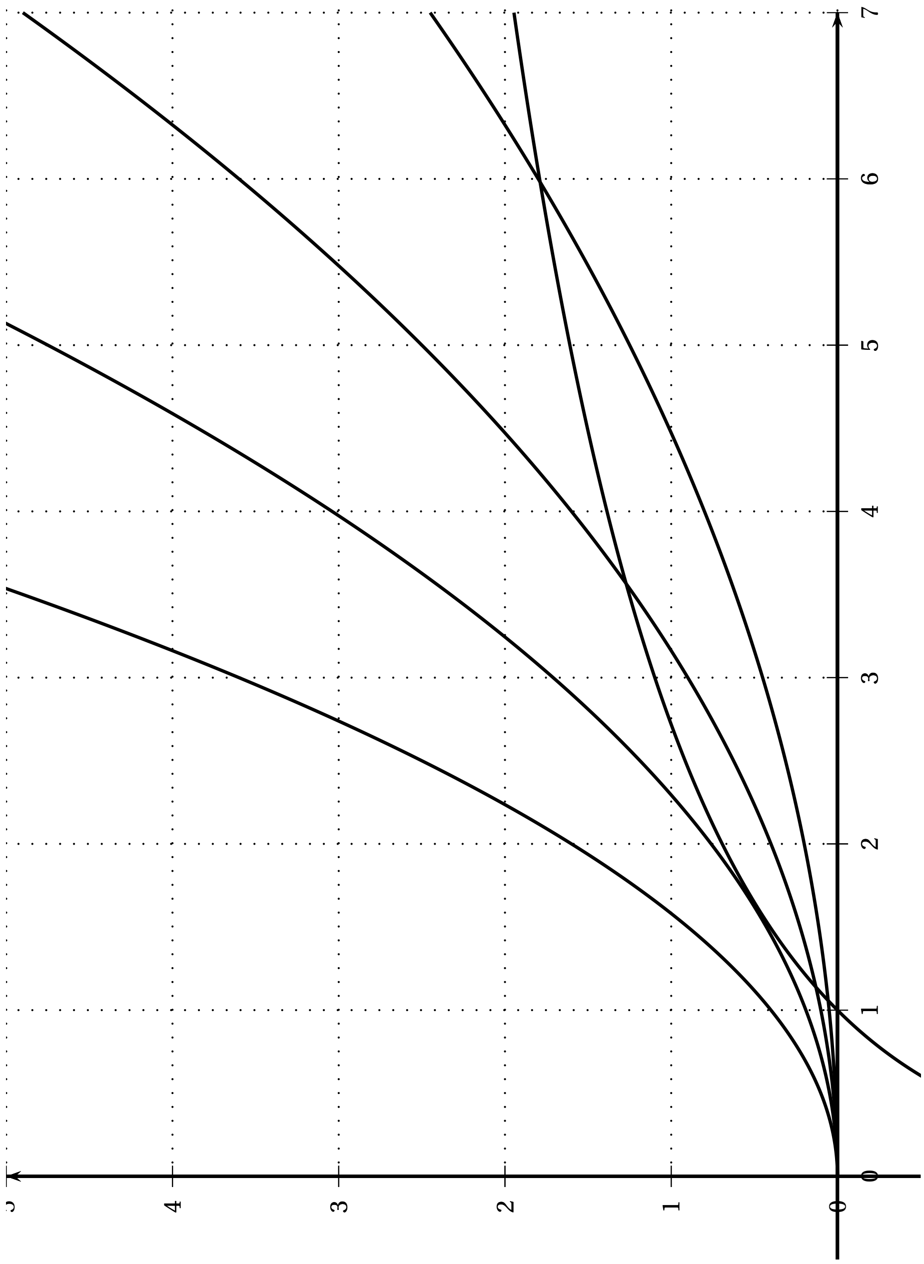
2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.

Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2