

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud ∞  
21 novembre 2013

A. P. M. E. P.

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ .
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
3. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .
5. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les fonctions  $g_n$  et  $h_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel  $x$  :  $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$ .  
On obtient alors, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ .
2. Comparer les fonctions  $h_n$  et  $g'_n$ ,  $g'_n$  étant la dérivée de la fonction  $g_n$ .  
En déduire que, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ .
3. Soit  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ ,  $f$  étant la fonction définie dans la partie A.  
En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de  $S_n$  puis sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

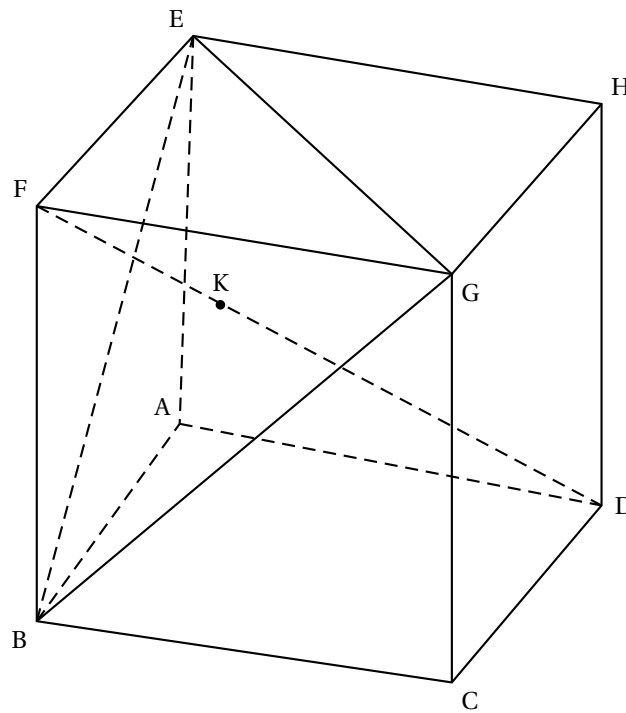
Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées  $K(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ .
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.



5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

### Exercice 3

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

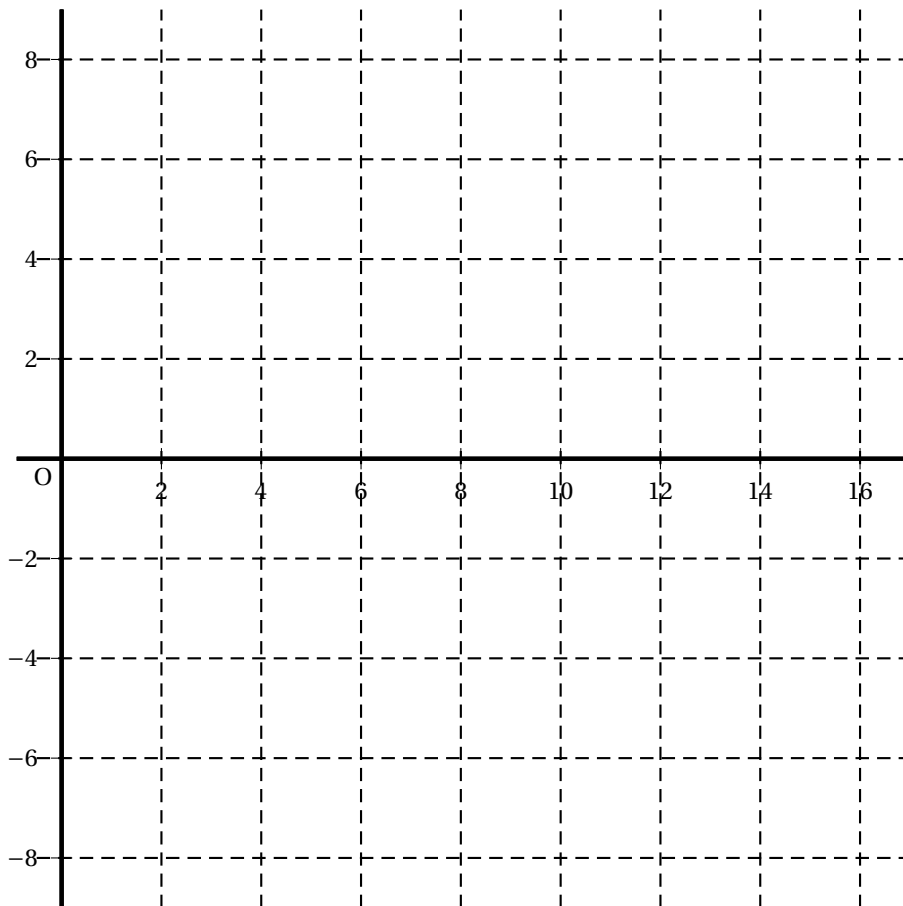
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.  
On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

- Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.
- On considère la suite  $(M_n)$  des points d'affixes  $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ , définie pour  $n \geq 1$ .
  - Vérifier que  $z_1$  est une solution de (E).
  - Écrire  $z_2$  et  $z_3$  sous forme algébrique.
  - Placer les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments  $[M_1, M_2]$ ,  $[M_2, M_3]$  et  $[M_3, M_4]$ .
- Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $z_n = 2^n \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$ .
- Calculer les longueurs  $M_1 M_2$  et  $M_2 M_3$ .  
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$ .
- On note  $\ell^n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$ .
  - Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\ell^n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$ .
  - Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $\ell^n \geq 1000$ .

**ANNEXE**  
**À rendre avec la copie**

**Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**



**Exercice 3****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira, soit sur la page n° 2 avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , soit sur la page n° 3 avec la probabilité  $\frac{3}{4}$ .
- Si un internaute est sur la page n° 2, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .
- Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit les évènements et les probabilités suivants :

$A_n$  : « Après la  $n$ -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note  $a_n = P(A_n)$ .

$B_n$  : « Après la  $n$ -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note  $b_n = P(B_n)$ .

$C_n$  : « Après la  $n$ -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note  $c_n = P(C_n)$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ .

On admet que, de même,  $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$  et  $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ .

Ainsi :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

$U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$  représente la situation initiale, avec  $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ .

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = MU_n$  où  $M$  est une matrice  $3 \times 3$  que l'on précisera.

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = M^n U_0$ .

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  telle que :  $x + y + z = 1$  et  $MU = U$ .
4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de  $M^n$ ,  $n$  étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  convergent vers des limites que l'on précisera.

- Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

**Exercice 4****5 points****Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à  $10^{-4}$  près.

**Partie A**

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les événements :  
 $M$  : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »  
 $C$  : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

- Montrer que  $P(M \cap C) = 0,03$ .
  - Calculer  $P(C)$ .
- On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

**Partie B**

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note  $X$  la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

- Définir la loi de la variable aléatoire  $X$ .
- Déterminer  $P(X = 35)$ .
- Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

**Partie C**

- On considère la variable aléatoire  $F$ , définie par  $F = \frac{X}{400}$ ,  $X$  étant la variable aléatoire de la **partie B**.  
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire  $F$  au seuil de 95 %.
- Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.  
Qu'en pensez-vous ?