

**EXERCICE 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.*

*Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$ .*

Le roller de vitesse est un sport qui consiste à parcourir une certaine distance le plus rapidement possible en rollers. Dans le but de faire des économies, un club de roller de vitesse s'intéresse à la gestion de ses chronomètres et des roulements de ses rollers.

**Partie A :**

On note  $T$  la variable aléatoire égale à la durée de vie, en mois, d'un chronomètre et on admet qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0555$ .

1. Calculer la durée de vie moyenne d'un chronomètre (arrondie à l'unité).
2. Calculer la probabilité qu'un chronomètre ait une durée de vie comprise entre un et deux ans.
3. Un entraîneur n'a pas changé son chronomètre depuis deux ans. Quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de fonctionner au moins un an de plus ?

**Partie B :**

Ce club fait des commandes groupées de roulements pour ses adhérents auprès de deux fournisseurs A et B.

- Le fournisseur A propose des tarifs plus élevés mais les roulements qu'il vend sont sans défaut avec une probabilité de 0,97.
- Le fournisseur B propose des tarifs plus avantageux mais ses roulements sont défectueux avec une probabilité de 0,05.

On choisit au hasard un roulement dans le stock du club et on considère les événements :

$A$  : « le roulement provient du fournisseur A »,

$B$  : « le roulement provient du fournisseur B »,

$D$  : « le roulement est défectueux ».

1. Le club achète 40 % de ses roulements chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.
  - a. Calculer la probabilité que le roulement provienne du fournisseur A et soit défectueux.
  - b. Le roulement est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.
2. Si le club souhaite que moins de 3,5 % des roulements soient défectueux, quelle proportion minimale de roulements doit-il commander au fournisseur A ?

**Partie C :**

Le diamètre intérieur standard d'un roulement sur une roue de roller est de 8 mm.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant en mm le diamètre d'un roulement et on admet que  $X$  suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart type 0,1.

Un roulement est dit conforme si son diamètre est compris entre 7,8 mm et 8,2 mm.

1. Calculer la probabilité qu'un roulement soit conforme.

2. Le fournisseur B vend ses roulements par lots de 16 et affirme que seulement 5 % de ses roulements sont non conformes.  
Le président du club, qui lui a acheté 30 lots, constate que 38 roulements sont non conformes. Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur B ?  
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
3. Le fabricant de roulements de ce fournisseur décide d'améliorer la production de ses roulements. Le réglage de la machine qui les fabrique est modifié de sorte que 96 % des roulements soient conformes. On suppose qu'après réglage la variable aléatoire  $X$  suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart-type  $\sigma$ .
- Quelle est la loi suivie par  $\frac{X-8}{\sigma}$  ?
  - Déterminer  $\sigma$  pour que le roulement fabriqué soit conforme avec une probabilité égale à 0,96.

**EXERCICE 2****5 points****Commun à tous les candidats**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5  $\mu\text{g/mL}$ .

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où  $f(t)$  représente le taux de vasopressine (en  $\mu\text{g/mL}$ ) dans le sang en fonction du temps  $t$  (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

- Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant  $t = 0$  ?
  - Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
  - Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter ce résultat.
- On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .  
Vérifier que pour tout nombre réel  $t$  positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

- Étudier le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  (en incluant la limite en  $+\infty$ ).
  - À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?  
Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
- Démontrer qu'il existe une unique valeur  $t_0$  appartenant à  $[0; 4]$  telle que  $f(t_0) = 2,5$ .  
En donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

On admet qu'il existe une unique valeur  $t_1$  appartenant à  $[4; +\infty[$  vérifiant  $f(t_1) = 2,5$ .

On donne une valeur approchée de  $t_1$  à  $10^{-3}$  près :  $t_1 \approx 18,930$ .

- Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5  $\mu\text{g/mL}$  dans le sang.
- Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $F(t) = -12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t} + 2t$ .
    - Démontrer que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  et en déduire une valeur approchée de  $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$  à l'unité près.
    - En déduire une valeur approchée à 0,1 près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5  $\mu\text{g/mL}$ .

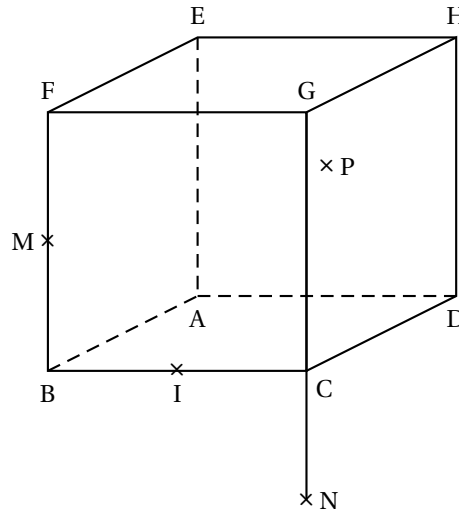
## EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH.

Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation

 $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GC}$  et le point P est le centre de la face ADHE.

## Partie A :

- Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.
- Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan (MNP).

## Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- Justifier que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan (MNP).

En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).

- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par G et orthogonale au plan (MNP).
- Montrer que la droite (d) coupe le plan (MNP) au point K de coordonnées  $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ .  
En déduire la distance GK.
- On admet que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires et que l'aire du quadrilatère MEDI est  $\frac{9}{8}$  unités d'aire.  
Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

## EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 0$  par : 
$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3 - \frac{10}{u_n + 4} \\ u_0 &= 5 \end{cases}$$

## Partie A :

- Déterminer la valeur exacte de  $u_1$  et de  $u_2$ .
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$ .

3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ .
4. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$
5. Justifier que la suite  $(u_n)$  converge.

**Partie B :**

On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

1. a. Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $v_0$ .
- b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \neq 1$ .
2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ .
3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Partie C :**

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable  $n$ ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geq 1,01$
$n \leftarrow n + 1$
$u \leftarrow 3 - \frac{10}{u + 4}$
Fin du Tant que

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A :**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a > b$ .

1. Démontrer que  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, b)$ .
2. En utilisant l'égalité précédente, calculer  $\text{PGCD}(4^3 - 1, 4^2 - 1)$ .
3. Compléter l'algorithme fourni en annexe de telle sorte qu'après exécution, la variable  $A$  contienne  $\text{PGCD}(4^3 - 1, 4^2 - 1)$ .

**Partie B :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

On admettra que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  est un entier naturel non nul.

On note  $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

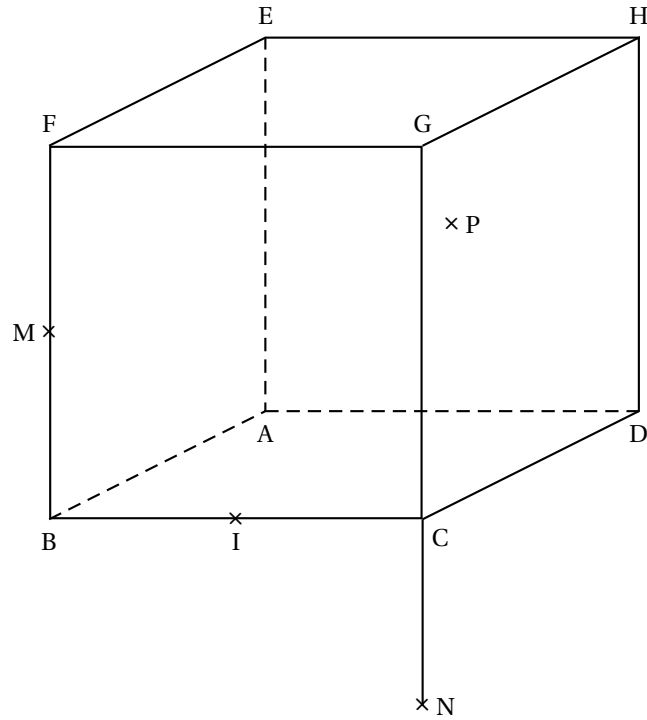
1. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = AV_n$  où  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2 dont on précisera les coefficients.
2. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- a. Justifier que  $P$  est inversible et donner  $P^{-1}$ .
- b. Vérifier que  $P^{-1}AP$  est la matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
4. Soit un entier naturel  $n$  non nul. Calculer les coefficients de la matrice  $A^n$ .

5. On admettra que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $V_n = A^n V_0$ .  
Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 4^n$ .
6. a. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 4u_n + 1$ .  
b. En déduire  $\text{PGCD}(u_{n+1}, u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .  
c. Déterminer pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$ .

## ANNEXE

À compléter et à remettre avec la copie

## EXERCICE 3



## EXERCICE 4

$A \leftarrow 4^3 - 1$ $B \leftarrow 4^2 - 1$ Tant que ..... : Si $A > B$ , alors : $A \leftarrow \dots$ Sinon : $B \leftarrow \dots$ Fin Si Fin Tant que
---