

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

## MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

**Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

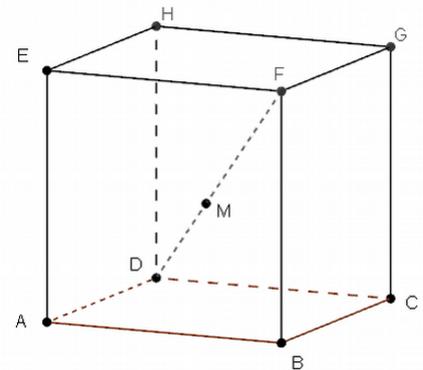
**EXERCICE 1 (6 points)**

**Commun à tous les candidats**

On considère un cube  $ABCDEFGH$  dont la représentation en perspective cavalière est donnée ci-contre.

Les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ .



**Partie A**

1. Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{DF}$  est normal au plan  $(EBG)$ .
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(EBG)$ .
3. En déduire les coordonnées du point  $I$  intersection de la droite  $(DF)$  et du plan  $(EBG)$ .  
On démontrerait de la même manière que le point  $J$  intersection de la droite  $(DF)$  et du plan  $(AHC)$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ .

**Partie B**

À tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on associe le point  $M$  du segment  $[DF]$  tel que  $\overrightarrow{DM} = x \overrightarrow{DF}$ . On s'intéresse à l'évolution de la mesure  $\theta$  en radian de l'angle  $\widehat{EMB}$  lorsque le point  $M$  parcourt le segment  $[DF]$ . On a  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

1. Que vaut  $\theta$  si le point  $M$  est confondu avec le point  $D$ ? avec le point  $F$ ?
- 2.a) Justifier que les coordonnées du point  $M$  sont  $(x; x; x)$ .
- b) Montrer que  $\cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$ . On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{ME}$  et  $\overrightarrow{MB}$ .
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction  $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$ .

$x$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de $f$	$\frac{1}{2}$	0		0
	↘		$-\frac{1}{2}$	↗

Pour quelles positions du point  $M$  sur le segment  $[DF]$  :

- a) le triangle  $MEB$  est-il rectangle en  $M$ ?
- b) l'angle  $\theta$  est-il maximal?

## EXERCICE 2 (6 points)

### Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de  $10^{-4}$ .

*Les parties A, B, et C sont indépendantes.*

### Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Nombre de voitures	75	19	10	5

- Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
- On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire  $T$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (exprimé en minute).
  - Justifier que l'on peut choisir  $\lambda = 0,5$  min.
  - Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
  - Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

### Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire  $D$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 70$  min et d'écart-type  $\sigma = 30$  min.

- Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?
  - Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?
  - À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?
- La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	$t$

Déterminer le tarif  $t$  de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

### **Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville**

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire  $T'$  qui suit une loi normale d'espérance  $\mu'$  et d'écart-type  $\sigma'$ . On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

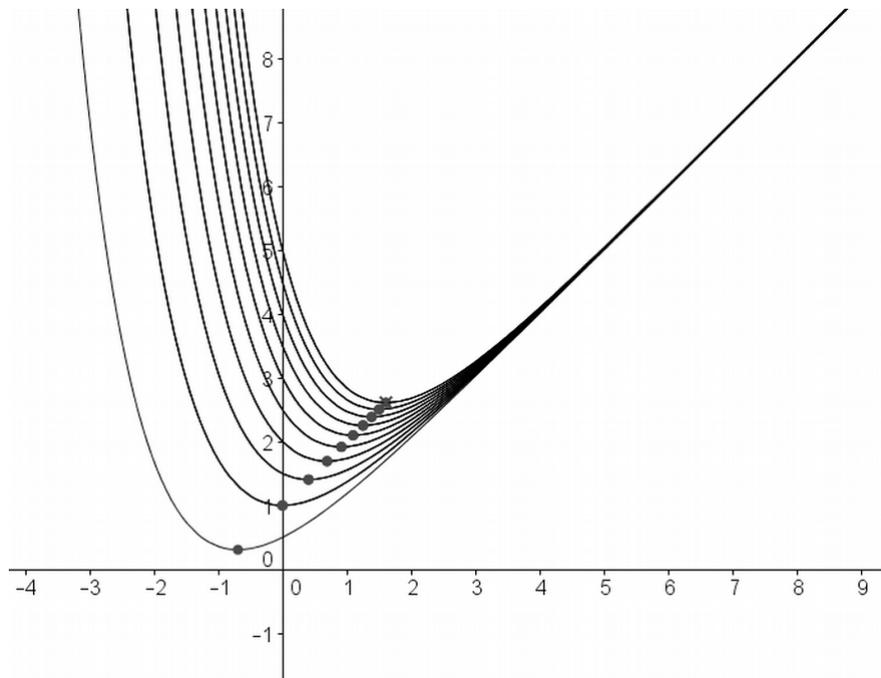
### EXERCICE 3 (3 points)

#### Commun à tous les candidats

Soit  $k$  un réel strictement positif. On considère les fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = x + k e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes  $\mathcal{C}_k$  pour différentes valeurs de  $k$ .



Pour tout réel  $k$  strictement positif, la fonction  $f_k$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté  $A_k$  de la courbe  $\mathcal{C}_k$ . Il semblerait que, pour tout réel  $k$  strictement positif, les points  $A_k$  soient alignés.

Est-ce le cas ?

#### EXERCICE 4 (5 points)

##### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  et  $c$  sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

$c$  est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

**Initialisation :**  $I$  prend la valeur 0  
 $P$  prend la valeur 0  
 $R$  prend la valeur 0

**Traitement :** Pour  $k$  allant de 0 à 7 :  
|  $R$  prend la valeur du reste de la division euclidienne de  $2a_{2k+1}$  par 9  
|  $I$  prend la valeur  $I + R$   
Fin Pour  
Pour  $k$  allant de 1 à 7 :  
|  $P$  prend la valeur  $P + a_{2k}$   
Fin Pour  
 $S$  prend la valeur  $I + P + c$

**Sortie :** Si  $S$  est un multiple de 10 alors :  
| Afficher « Le numéro de la carte est correct. »  
Sinon :  
| Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »  
Fin Si

- On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
  - Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable  $I$ .
  - Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
  - On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre  $a$  pour que le numéro de carte obtenu  $6a35 4002 9561 3411$  reste correct ?
- On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé  $c$  rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
- Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.
- On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.  
On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.  
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

# Annexe

*À rendre avec la copie*

**Exercice 4 - Question 1. a)**  
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_{2k+1}$								
$2a_{2k+1}$								
$R$								
$I$								

