BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de spécialité – Coefficient 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 (5 points) **Commun à tous les candidats**

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction f de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$).

   Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de X, est de 10 mois.

   a. Justifier que $\lambda = 0{,}1$.

   b. Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

   c. Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.

   d. Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps t, exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'événement $(X > t)$ est égale à 0,05. Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.
   On considère la variable aléatoire M représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que M suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.

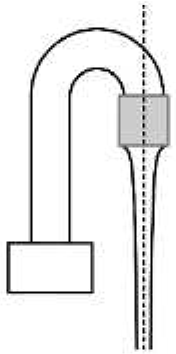
   a. Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.

   b. Déterminer la plus grande valeur de m, arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geq m)$ soit supérieure ou égale à 0,99.

3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise. Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.

   Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

Exercice 2 (5 points) **Commun à tous les candidats**



L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.

On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée **en annexe** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(\mathrm{H}) : f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0{,}25 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par $g(x) = k \ln x$.
   - **a.** Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H).
   - **b.** La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi ?
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\ 1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0\,;1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
2. On admet que le volume d'eau en cm³, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \int_\alpha^1 \pi\, x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.
   - **a.** Soit u la fonction dérivable sur $]0\,;\ 1]$ définie par $u(x) = \frac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.
   - **b.** Déterminer la valeur exacte de V. En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V.

Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul $I_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. **a.** Calculer $I_0 - I_1$.
   b. En déduire I_1.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
   b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n .

4. Soit n un entier naturel non nul.
   On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
   b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
   b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

2. On admet que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+3} = 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} = 15u_n + 26v_n \end{cases}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n : $v_{n+3} \equiv v_n \ [5]$.

3. Soit r un entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel q, $v_{3q+r} \equiv v_r \ [5]$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n le terme v_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice M.

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls, avec q le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que $q < p < 2q$.
2. On admet que la matrice M est inversible. Donner son inverse M^{-1} (aucune justification n'est attendue).

Soit le couple (p', q') défini par $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

3. **a.** Vérifier que $p' = 2p - 3q$ et que $q' = -p + 2q$.
   b. Justifier que (p', q') est un couple d'entiers relatifs.
   c. On rappelle que $p = q\sqrt{3}$. Montrer que $p' = q'\sqrt{3}$.
   d. Montrer que $0 < q' < q$.
   e. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Annexe (exercice 2) :