

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2020

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de spécialité – Coefficient 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage des calculatrices est autorisé dans les conditions suivantes :

- l'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé ;
- l'usage de calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice n°1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de cinq questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des réponses est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué 1 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

On extrait une boule de l'urne et on note sa couleur.

On répète 4 fois cette expérience, de manière indépendante, en remettant la boule à chaque fois dans l'urne.

La probabilité, arrondie au centième, d'obtenir au moins 1 boule blanche est :

Réponse A : 0,15 Réponse B : 0,63 Réponse C : 0,5 Réponse D : 0,85.

2. Soit n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un sac contient n pièces indiscernables au toucher. Ces pièces comportent toutes un côté « PILE » et un côté « FACE » sauf une qui contient deux côtés « FACE ».

On choisit au hasard une pièce du sac puis on la lance.

La probabilité d'obtenir le côté « FACE » est égale à :

Réponse A : $\frac{n-1}{n}$ Réponse B : $\frac{n+1}{2n}$ Réponse C : $\frac{1}{2}$ Réponse D : $\frac{n-1}{2n}$.

3. On considère T la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 60$ et d'écart-type $\sigma = 6$.

La probabilité $P_{(T>60)}(T > 72)$ arrondie au millième est :

Réponse A : 0,954 Réponse B : 1 Réponse C : 0,023 Réponse D : 0,046.

4. La durée de fonctionnement, exprimée en années, d'un moteur jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 3 ans est égale à :

Réponse A : $e^{-3\lambda}$ Réponse B : $1 - e^{-3\lambda}$ Réponse C : $e^{3\lambda} - 1$ Réponse D : $e^{3\lambda}$.

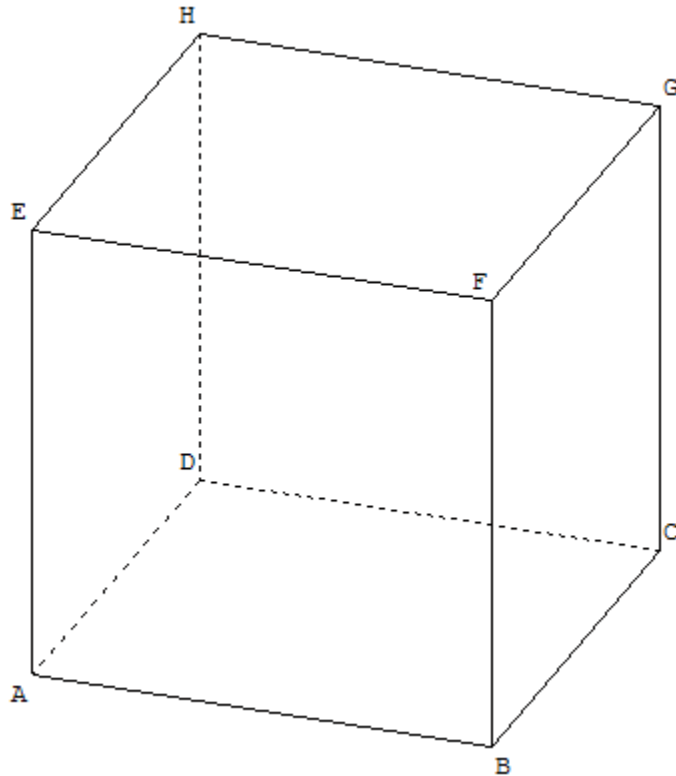
5. On note X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. La probabilité qu'une valeur prise par la variable aléatoire X soit solution de l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$ est égale à :

Réponse A : $\frac{2}{3}$ Réponse B : $\frac{1}{3}$ Réponse C : $\frac{1}{2}$ Réponse D : $\frac{1}{\pi}$.

Exercice n°2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Pour tout réel t , on considère le point M de coordonnées $(1 - t; t; t)$.

1. Montrer que pour tout réel t , le point M appartient à la droite (BH).

On admet que les droites (BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbf{R}.$$

2. Montrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

3. Pour tout réel t' , on considère le point $M'(1; t'; 1 - t')$.

- Montrer que pour tous réels t et t' , $MM'^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.
- Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale ? Justifier.

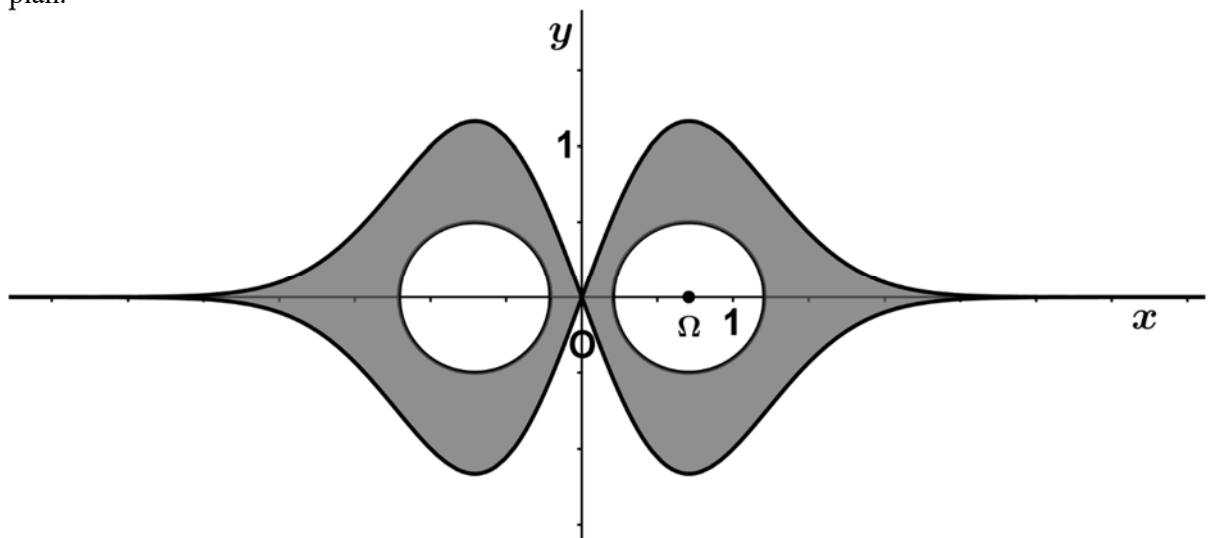
4. On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et Q celui de coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Exercice n°3 (6 points)
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = xe^{-x^2+1}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
 - b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Pour tout réel x , on considère les points M et N de la courbe (C) d'abscisses respectives x et $-x$.
 - a. Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.
 - b. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet sur $[0; +\infty[$ exactement deux solutions notées α et β (avec $\alpha < \beta$).
 - b. En déduire les solutions sur $[0; +\infty[$ de l'inéquation $f(x) \geq 0,5$.
 - c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α et β .
5. Soit A un réel strictement positif. On pose $I_A = \int_0^A f(x)dx$.
 - a. Justifier que $I_A = \frac{1}{2}(e - e^{-A^2+1})$.
 - b. Calculer la limite de I_A lorsque A tend vers $+\infty$.
 On admet que cette limite est l'aire en unités d'aire située entre la partie de la courbe (C) sur $[0; +\infty[$ et l'axe des abscisses.
6. Comme illustré sur le graphique ci-dessous, on s'intéresse à la partie grisée du plan qui est délimitée par :
 - la courbe (C) sur \mathbf{R} et la courbe (C') symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses ;
 - le cercle de centre $\Omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
 On admet que le disque de centre $\Omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sont situés entièrement entre la courbe (C) et la courbe (C') .

Déterminer une valeur approchée en unité d'aire au centième près de l'aire de cette partie grisée du plan.



Exercice 4 (5 points)*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1, b_1 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ non nul } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}.$$

1. Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3 .

2. Donner M^2 . Montrer que $M^2 = M + 2I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

On admet que pour tout entier naturel non nul n , $M^n = a_n M + b_n I$, où (a_n) et (b_n) sont les suites précédemment définies.

3. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel non nul n , X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , $X_{n+1} = AX_n$.

b. Sans justifier, exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, X_n en fonction de A^{n-1} et de X_1 .

c. Justifier que P est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

On note P^{-1} cette matrice.

d. Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

e. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

f. On admet que pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{3} \times (2^n + (-1)^{n-1})$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel k , $2^{4k} - 1 \equiv 0$ modulo 5.

5. Soit n un entier naturel non nul et multiple de 4.

a. Montrer que $3a_n$ est divisible par 5.

b. En déduire que a_n est divisible par 5.