REMPLACEMENT 2015
Métropole - Antilles - Guyane - Réunion

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE
E4 MATHÉMATIQUES ET TIM

Série : STAV

Durée : 2 heures

Matériel(s) et document(s) autorisé(s) : **Calculatrice**

Le sujet comporte 3 pages

SUJET

EXERCICE 1 (6 points)

Dans un cybercafé, la probabilité qu'un ordinateur soit infecté par un virus au cours d'une journée est égale à 0,2. Un antivirus a été installé.

Si l'ordinateur est infecté par un virus, l'antivirus se déclenche dans 90 % des cas

Si l'ordinateur n'est pas infecté par un virus, l'antivirus se déclenche dans 5 % des cas.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près si nécessaire.

Partie A :

On s'intéresse à un ordinateur du cybercafé sur une journée particulière.
On note I l'événement : « l'ordinateur est infecté par un virus au cours de la journée », et D l'événement : « l'antivirus se déclenche ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur ne soit pas infecté et que l'antivirus se déclenche.
3. Démontrer que la probabilité que l'antivirus se déclenche est égale à 0,22.
4. Calculer la probabilité qu'aucun virus n'ait infecté l'ordinateur sachant que l'antivirus s'est déclenché.

Partie B :

Le cybercafé est équipé de 13 ordinateurs, dont les infections par des virus sont indépendantes. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs infectés au cours de la journée.

On rappelle que la probabilité qu'un ordinateur soit infecté par un virus au cours d'une journée est égale à 0,2.

1. Démontrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'on ait plus de la moitié des ordinateurs infectés.

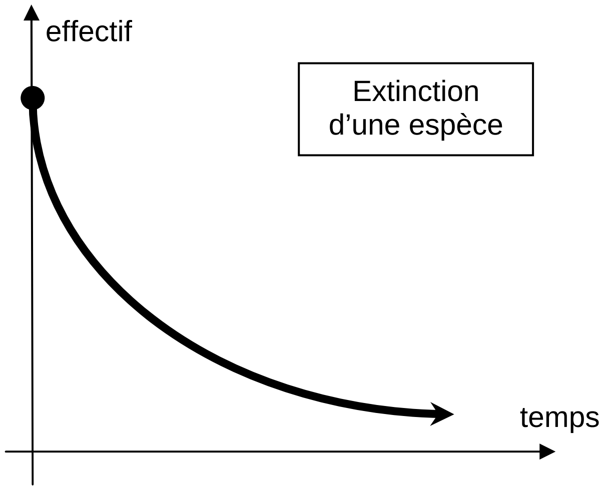
EXERCICE 2 (7 points)

On s'intéresse à l'extinction d'une espèce dans un milieu fermé, un aquarium dans cet exemple.
Les scientifiques modélisent la situation à l'aide d'une fonction exponentielle (voir graphique ci-contre).

- A l'instant $x=0$, on décide d'introduire 5000 individus de cette espèce dans un aquarium.
- Au bout de 10 jours, il n'y a plus que 4500 individus.

Soit x le nombre de jours écoulés depuis la réintroduction, on note $f(x)$ l'effectif de la population au jour x.

On suppose que la fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par une expression de la forme $f(x)=be^{ax}$.



1. Recherche des paramètres a et b
   - **a.** Justifier que $f(0)=5000$. En déduire la valeur de b.
   - **b.** Exprimer $f(10)$ en fonction de a. En déduire qu'une valeur approchée de a à 10^{-2} près est 0,01.

2. Dans la suite de l'exercice, on admettra que $f(x)=5000e^{-0,01x}$.
   - **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?
   - **b.** Calculer la dérivée f' de f.
   - **c.** Étudier le signe de f' sur $[0;+\infty[$ et en déduire le tableau de variation de f.

3. On écrit l'algorithme suivant :

Initialisation
    t prend la valeur 0
    y prend la valeur 5000
Traitement
Tant que $y \geq 1$
    t prend la valeur $t+1$
    y prend la valeur $5000e^{-0,01t}$
Fin Tant que
Sortie
Afficher t

   - **a.** Quelles seront les trois premières valeurs calculées de la variable t ? Donner à chacune des valeurs de t, les valeurs correspondantes de la variable y. (Les résultats seront arrondis à l'unité et on pourra éventuellement les présenter sous forme d'un tableau)
   - **b.** La valeur affichée à la sortie de l'algorithme est 852. Que représente concrètement cette valeur ?
   - **c.** Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)<1$.
     La réponse est-elle cohérente avec la valeur affichée en fin d'algorithme ?

EXERCICE 3 (4 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Une entreprise d'agro-alimentaire utilise une doseuse automatique pour mettre du miel en pots. On s'intéresse à la masse de miel, exprimée en grammes, contenue dans les pots d'une fabrication.

Partie A – Loi normale

Un pot est dit conforme lorsque la masse de miel appartient à l'intervalle $[500\,;508]$.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à un pot prélevé au hasard dans la fabrication, associe la masse de miel contenue dans ce pot.
On admet que X est distribuée suivant la loi normale de moyenne 505 et d'écart-type 2.

1. Déterminer $P(X \geq 505)$.

2. *Pour les calculs de probabilité, on pourra utiliser le tableau suivant ou la calculatrice :*

a	*500*	*502*	*504*	*506*	*508*
$P(X \leq a)$	*0,006221*	*0,06681*	*0,30854*	*0,69146*	*0,93319*

   a. Calculer $P(500 \leq X \leq 508)$.
   b. En déduire la probabilité pour qu'un pot prélevé au hasard ne soit pas conforme.

Partie B – Intervalle de fluctuation et prise de décision

Lorsque la doseuse est correctement réglée, on admet que la proportion p de pots non conformes dans l'ensemble de la fabrication est de 7 %.

On rappelle que *:*
Pour une proportion p connue dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :

$$\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\ p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de pots non conformes obtenue sur un échantillon de taille 200.

2. Lors d'un contrôle, le responsable qualité de l'entreprise prélève un échantillon de 200 pots.
   On suppose que la production est suffisamment importante pour que le choix des 200 pots puisse être assimilé à un prélèvement avec remise. Le responsable constate que 30 pots ne sont pas conformes. Doit-il prendre la décision d'effectuer un réglage de la doseuse ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (3 points)

On cherche à calculer $\displaystyle\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$ avec f définie sur $[1;e]$ par $f(x)=2\ln(x)+\dfrac{2x+1}{x}$

1. Démontrer que la fonction F définie sur $[1;e]$ par $F(x)=(2x+1)\ln x$ est une primitive de f.

2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$ à 10^{-3} près.