BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

ÉPREUVE E 4

MATHÉMATIQUES ET TECHNOLOGIES INFORMATIQUE ET MULTIMEDIA

Série STAV

Durée : 2 heures

Matériel(s) et document(s) autorisé(s) : **Calculatrice**

Le sujet comporte 6 pages

L'annexe A est à rendre avec la copie

SUJET

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée.

EXERCICE 1 : (9 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;3]$ par :

$$f(x) = e^{x-1} - x + 3$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty\ ;3]$.

3.

a Résoudre dans $]-\infty\ ;3]$ l'inéquation : $e^{x-1} - 1 \geqslant 0$.

b En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\ ;3]$.

4.

a Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty\ ;3]$

b En déduire que $f(x)$ est strictement positif sur $]-\infty\ ;3]$.

5.

a Compléter le tableau de valeurs donné en **annexe A (à rendre avec la copie)**.
Les valeurs seront arrondies à 10^{-1} près.

b Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

6.

a Déterminer une primitive F de f sur $]-\infty\ ;3]$.

b Calculer la valeur exacte de $\int_0^1 \ (x)\ x$ puis donner la valeur arrondie à 10^{-2} près.
Interpréter graphiquement cette valeur.

EXERCICE 2 : (7 points)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies à 0,001 près si nécessaire.

Une des épreuves du concours d'entrée aux ENSA (Écoles Nationales Supérieures d'Agronomie) est un oral de biologie.
Lors de cette épreuve, les candidats doivent répondre soit à une question de biologie animale, soit à une question de biologie végétale. Les résultats de la dernière promotion montrent que :

- 45% des questions ont porté sur la biologie animale ;
- parmi les candidats interrogés sur la biologie animale, 60% ont été reçus au concours ;
- parmi les candidats interrogés sur la biologie végétale, 70% ont été reçus au concours.

On interroge au hasard un candidat de cette promotion.

On note A, V et R les évènements suivants :

A : « le candidat est interrogé sur la biologie animale » ;

V : « le candidat est interrogé sur la biologie végétale » ;

R : « le candidat est reçu au concours ».

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités en précisant les valeurs des probabilités sur chaque branche.

2. Prouver que p(R) = 0,655.

3. Le candidat est reçu au concours.
Calculer la probabilité pour qu'il ait été interrogé sur la biologie animale.

4. Les évènements A et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

5. On interroge au hasard et de façon indépendante 6 candidats de cette promotion.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats reçus à ce concours parmi les 6.

a Justifier que la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n = 6 et p = 0,655.

b Calculer la probabilité que les 6 candidats soient reçus au concours.

c Calculer la probabilité qu'au moins 2 candidats soient reçus au concours.

EXERCICE 3 (4 points)

La courbe C, donnée dans le **document 1**, est la représentation graphique dans un repère orthogonal, d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse -3.

La droite Δ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

La droite D est asymptote à C en $+\infty$.

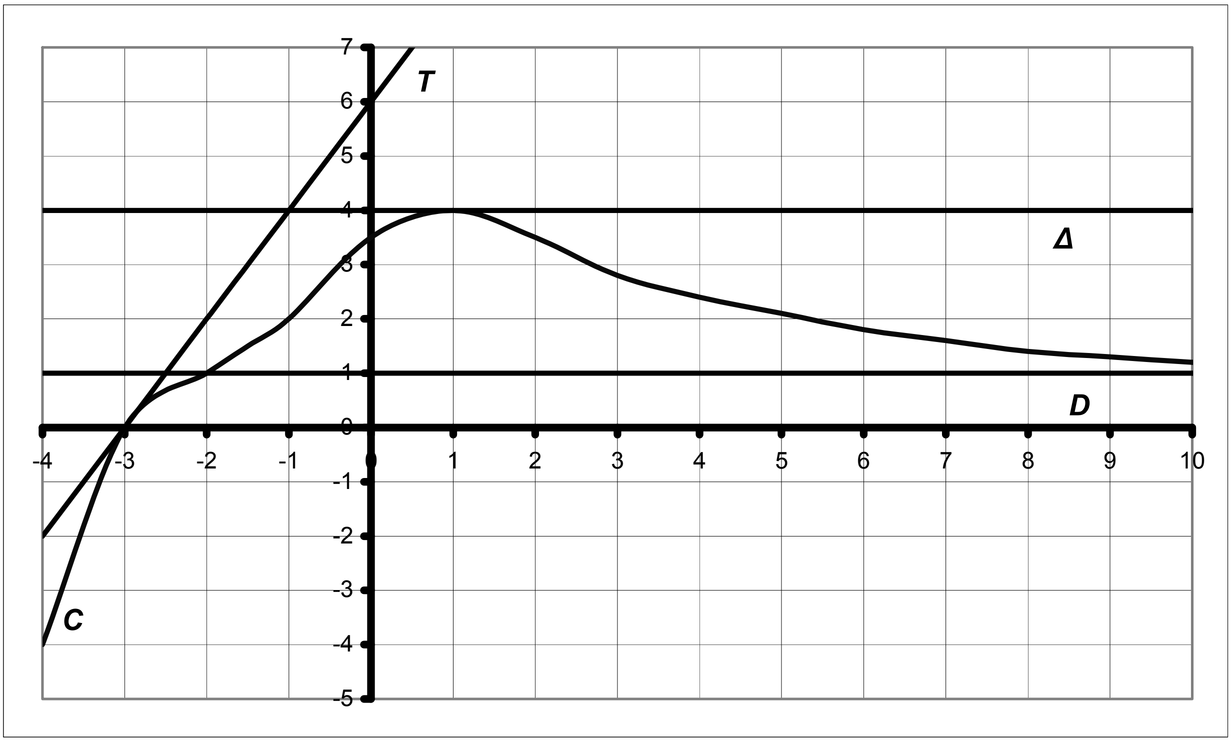
Par lecture graphique, compléter le QCM donné en **annexe A.**

Pour chaque question, une et une seule des trois réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point.
Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0.

DOCUMENT 1

EXERCICE 3

Représentation graphique de la fonction g



BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Suites :

Suites arithmétiques de raison a :

Terme initial u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$;

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} .$$

Suites géométriques de raison b :

Terme initial u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$;

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \frac{1-b^{n+1}}{1-b} \quad (b \neq 1).$$

Équation du second degré :

a, b, c, nombres réels tels que $a \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

1°) si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

On a alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

avec $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ et $x'x'' = \dfrac{c}{a}$.

2°) si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$

et $ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$.

3°) si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

II. TRIGONOMÉTRIE : *Valeurs remarquables (angles en radians)* :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

III. STATISTIQUES : *Moyenne, variance, écart-type.*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes ou en tableau d'effectifs:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

IV. PROBABILITÉS.

Dénombrements:

$$n! = n(n-1)(n-2)....3 \times 2 \times 1$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1).....(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Calcul de probabilités :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \; ; \quad p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Espérance d'une variable aléatoire: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Loi binomiale : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Espérance de X, variable aléatoire de loi binomiale: $E(X) = np$

V. ANALYSE.

Fonction logarithme népérien :

$\ln$ est, sur $]0;+\infty[$, la primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ qui s'annule pour $x = 1$.

$\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Fonction exponentielle :

x réel, y réel strictement positif :

$y = \exp(x) = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Dérivées et primitives usuelles et opérations sur les dérivées :

Intervalle de validité	$f(x)$	$f'(x)$
IR	k	0
IR	x	1
IR	x^n, $n \in$ IN*	nx^{n-1}
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	x^n, $n \in$ Z*	nx^{n-1}
$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$]0;+\infty[$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
sur tout intervalle où $ax + b > 0$	$\ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$
IR	e^x	e^x
IR	e^{ax+b}	$a\,e^{ax+b}$
IR	$\cos x$	$-\sin x$
IR	$\sin x$	$\cos x$

Règles de calcul

$(u+v)' = u' + v'$

si k constante réelle:

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Calcul intégral :

Définition :

Si F est une primitive de f, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Somme :

$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Produit par une constante :

$\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$.

Positivité :

Si $a \le b$ et $f \ge 0$, $\int_a^b f(t)dt \ge 0$

M. EX.

Nom :
(EN MAJUSCULES)
Prénom(s) :

Date de naissance : 19

EXAMEN :

Spécialité ou Option :

ÉPREUVE :

Centre d'épreuve :

Date :

N° ne rien inscrire

N° ne rien inscrire

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

Les valeurs seront arrondies à 10^{-1} près.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$									

Exercice 3 : QCM

Cocher, pour chaque question posée, la réponse qui convient.
Aucune justification n'est demandée.

1. L'image de -1 par g est :

☐ 4 ☐ 1 ☐ 2

2. Le nombre dérivé de g en –3 est :

☐ 2 ☐ 6 ☐ 0

3. La fonction g est strictement positive sur l'intervalle :

☐ $]-\infty\ ;1[$ ☐ $]-4;1]$ ☐ $]-3+\infty[$

4. La limite de la fonction g en $+\infty$ est égale à :

☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ 1

M. E X.

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE

NOM :
(EN MAJUSCULES)

Prénoms :

Date de naissance : **19**

EXAMEN

Spécialité ou Option :

ÉPREUVE :

Centre d'épreuve :

Date :

N° ne rien inscrire

N° ne rien inscrire

A RENDRE AVEC LA COPIE