

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2020

Série STD2A

Sciences et Technologies du Design et des Arts Appliqués

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures

COEFFICIENT : 2

**Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

L'annexe 1, page 6, est à rendre avec la copie.

L'annexe 2, page 7, est à rendre avec la copie.

L'annexe 3, page 8, est à rendre avec la copie.

Le candidat doit traiter les 3 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

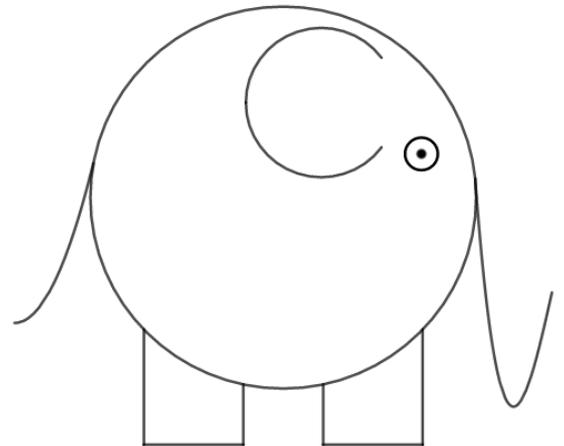
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue », est autorisé.

Exercice 1 (9 points)

La société DBB, qui produit du prêt-à-porter pour enfant, souhaite changer son ancien logo, pour celui représenté ci-contre.

L'objet de l'exercice est d'étudier une modélisation mathématique de la forme de ce logo qui peut être décomposé en trois parties. Chaque partie peut être modélisée :

- « la queue » de l'éléphant, par la courbe représentative d'une fonction déjà dessinée sur l'annexe 1.
- « le corps » de l'éléphant par un cercle et « l'oreille » par un arc de cercle (les pattes et l'œil étant déjà représentés sur l'annexe 1).
- « la trompe » de l'éléphant, par la courbe représentative d'une fonction f .



Les parties A et B sont indépendantes.

L'annexe 1 est à compléter et à rendre avec la copie.

Partie A : Modélisation du « corps » de l'éléphant (corps et oreille)

1. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie sont représentés, dans le repère orthonormé (O, I, J) , les points de coordonnées suivantes: $O(0 ; 0)$, $A(-5 ; -0,5)$ et $B(0,5 ; -6,75)$ et le cercle **C** constituant le corps de l'éléphant. On considère la droite (T) qui passe par les points O et B . On admet que cette droite est tangente au cercle **C** au point O .

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}$

En déduire que le point A n'est pas le centre du cercle **C**. Justifier.

b) Tracer la droite (T) en annexe 1 à rendre avec la copie, puis en déterminer une équation.

2. Tracer, sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, la courbe \mathcal{C}_1 définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = -4 + 2 \cos(t) \\ y(t) = 2 + 2 \sin(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in \left[\frac{\pi}{4} ; \pi \right]$$

Tracer, ensuite la courbe \mathcal{C}_2 , symétrique de la courbe \mathcal{C}_1 par symétrie d'axe la droite (D) d'équation $y = 2$.

Partie B : Modélisation de la « trompe » de l'éléphant

On modélise la trompe à l'aide de la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction polynomiale de degré 3 sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d des nombres réels.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

L'objectif de cette partie est de déterminer les coefficients a, b, c et d vérifiant les contraintes suivantes :

- Le point $O(0 ; 0)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_f .
- Le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point O est $-13,5$.
- La courbe \mathcal{C}_f passe par le point $D(1; -6)$ et elle y admet une tangente horizontale.

1. Traduire mathématiquement toutes ces contraintes et en déduire que les nombres réels a, b, c et d sont solutions du système :

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = -13,5 \\ a + b = 7,5 \\ 3a + 2b = 13,5 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système et en déduire que l'expression de la fonction f est :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 9x^2 - \frac{27}{2}x$$

3. Étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .

b) Établir les variations de la fonction f sur $[0 ; 2]$.

4. Tracé de la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

a) Compléter le tableau de valeurs en **annexe 1 à rendre avec la copie** (arrondir à 10^{-2}).

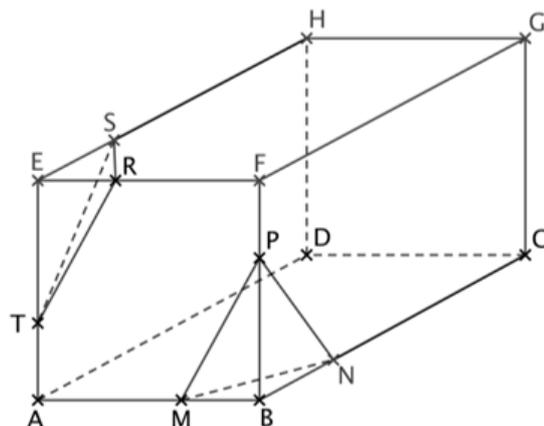
b) Tracer en **annexe 1 à rendre avec la copie**, la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 2 (6 points)

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AE = 6$ cm et $AD = 12$ cm, représenté en perspective cavalière ci-contre.

On considère les points M, N, P, R, S et T sur la figure ci-contre où M est sur $[AB]$, N sur $[BC]$, P sur $[BF]$, R sur $[EF]$, S sur $[EH]$ et T sur $[AE]$ et tels que :

$$AM = BN = BP = ES = ET = FR = x \text{ cm, avec } x \in [0 ; 6].$$



Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Dans cette partie, on s'intéresse à la position des points M, N, P, R, S et T pour que la somme des volumes des tétraèdres $MBNP$ et $REST$ soit maximale.

1. Montrer que l'aire du triangle BNM , en cm^2 , est égale à $-\frac{x^2}{2} + 3x$.
2. Exprimer en fonction de x le volume du tétraèdre $MBNP$.
3. En déduire la somme des volumes des tétraèdres $MBNP$ et $REST$.
4. On considère la fonction V définie sur $[0 ; 6]$ par $V(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$.

On admet que le tableau de signe sur $[0 ; 6]$ de la fonction dérivée de V est donné par :

x	0	4	6
$V'(x)$	+	0	-

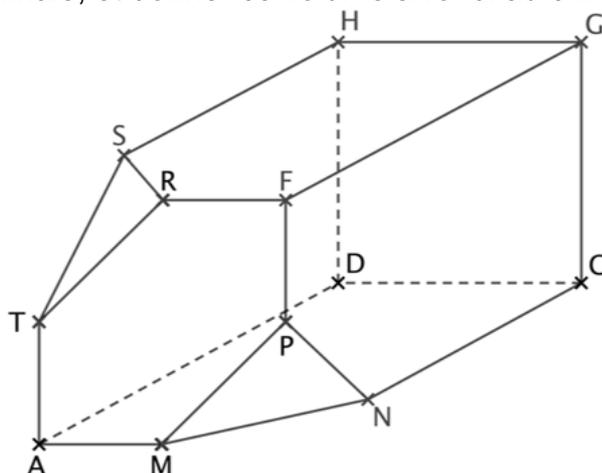
À partir de ces informations, en déduire la valeur exacte de x pour laquelle la somme des volumes des tétraèdres $MBNP$ et $REST$ est maximale, et donner ce volume arrondi au cm^3 .

Partie B :

Dans cette partie, on suppose que $x = 3$, c'est-à-dire que les points M, P, R et T sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BF]$, $[EF]$ et $[AE]$, c'est-à-dire :

$$AM = BN = BP = ES = ET = FR = 3 \text{ cm.}$$

En extrayant les deux tétraèdres $MBNP$ et $REST$, on obtient l'objet ci-contre tracé en perspective cavalière.



Les points désignés par une lettre majuscule A, B, C, D, \dots sont nommés par la même lettre en minuscule a, b, c, d, \dots dans la représentation en perspective centrale. Le segment $[BF]$ est dans un plan frontal et le plan (ABC) est horizontal.

1. Construire sur l'**annexe 2 à rendre avec la copie**, l'image $abcdefgh$ du pavé droit $ABCDEFGH$ en laissant les traits de construction.
2. **a)** Le point image p est-il le milieu du segment $[bf]$? Justifier.
b) Placer les points p et t .
3. **a)** Le point image m est-il le milieu du segment $[ab]$? Justifier.
b) Construire les points m et r en laissant les traits de construction.
4. Placer le point s en utilisant le point n et repasser en couleur l'objet obtenu.

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier un pavage du plan construit à partir d'un trapèze particulier.

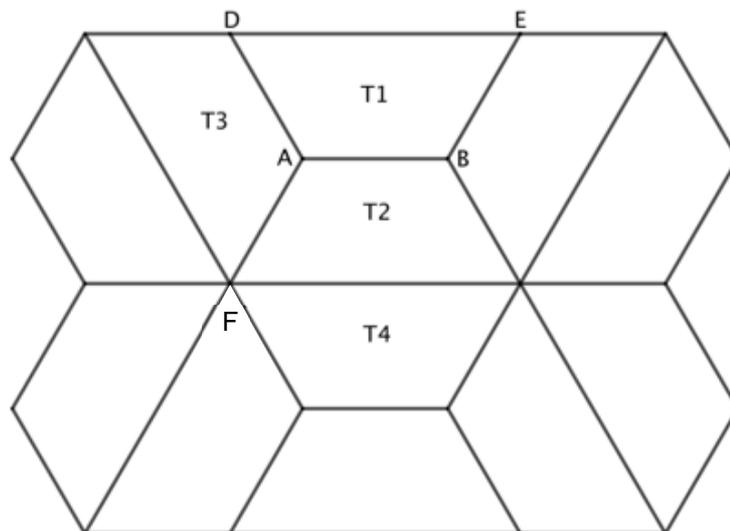
Partie A : Construction du trapèze

On considère un triangle équilatéral ABC tel que $AB = 4$ cm.

1. **Sur l'annexe 3-A à rendre avec la copie**, construire le point D , distinct du point B , tel que le triangle ACD soit équilatéral.
De même construire le point E , distinct du point A , tel que triangle BCE soit équilatéral.
2. Déterminer les angles du trapèze $ABED$.
3. Déterminer la valeur exacte de AE .

Partie B : Construction du motif

On considère le motif ci-dessous construit à partir du trapèze isocèle $ABED$.



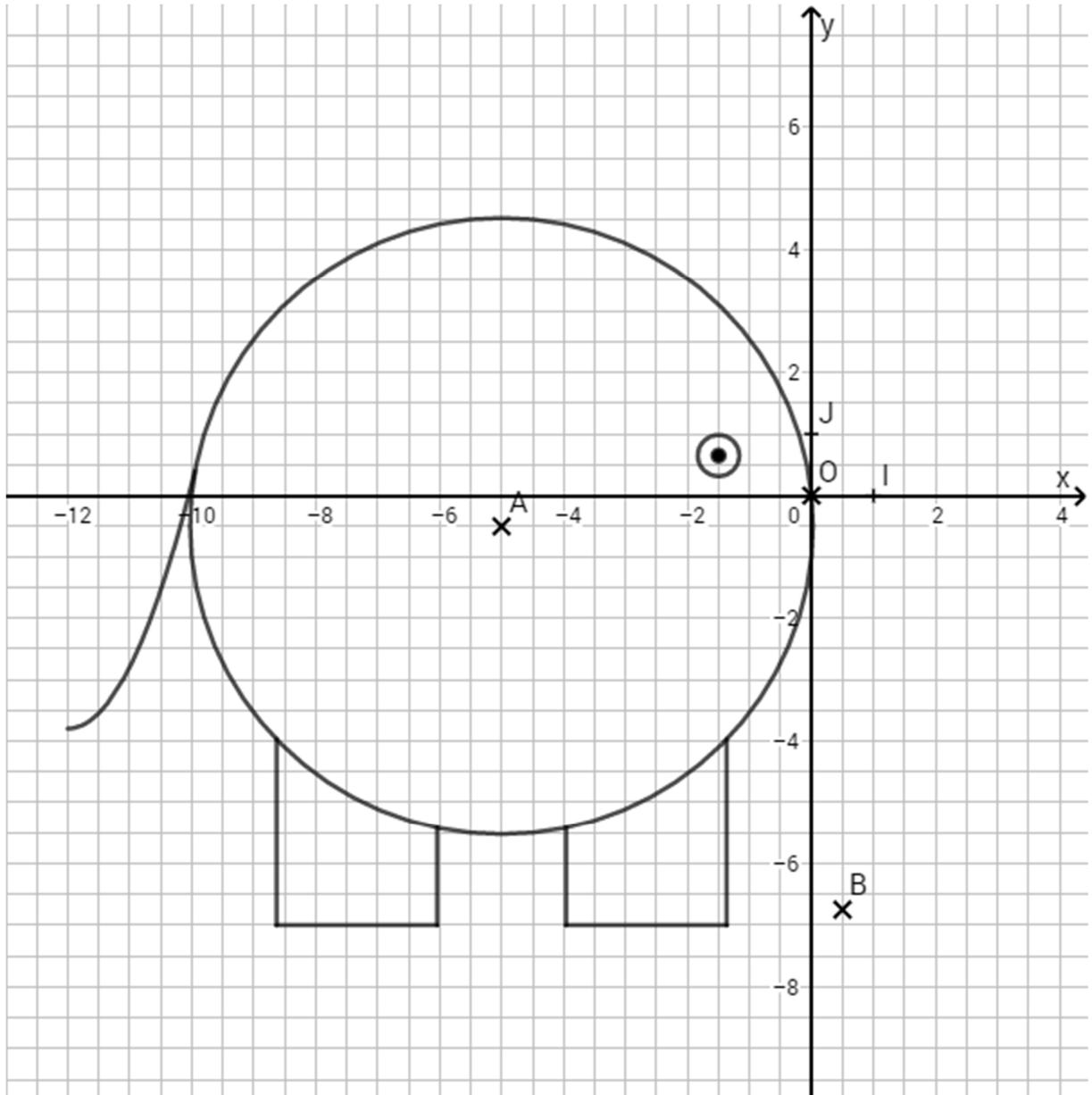
Par quelles transformations passe-t-on de $T1$ à $T2$, de $T1$ à $T3$ et de $T1$ à $T4$?
(On précisera les éléments caractéristiques de chacune des transformations).

Partie C : Construction du pavage

On a obtenu le pavage du plan représenté en **annexe 3-B** à partir du motif de la partie B.

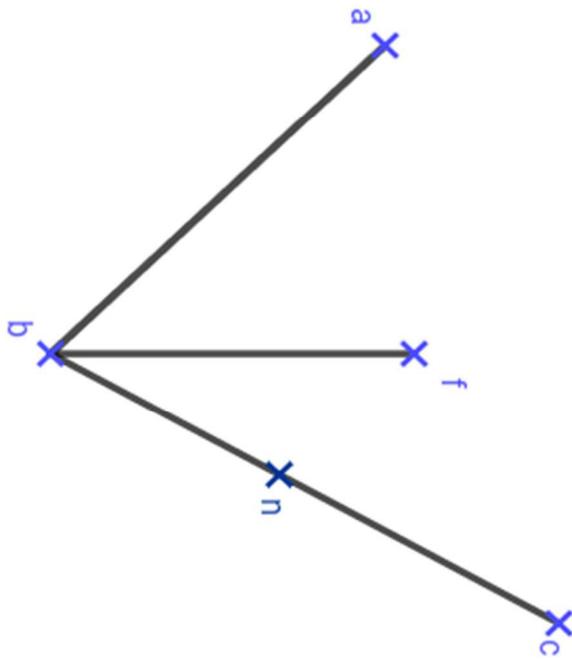
1. Dans le pavage représenté en **annexe 3-B à rendre avec la copie**, hachurer un motif de la partie B contenu.
2. Par quelles transformations peut-on obtenir ce pavage à partir du motif hachuré précédemment ?
(On précisera les éléments caractéristiques de ces transformations en plaçant et en nommant le cas échéant des points sur l'**annexe 3-B à rendre avec la copie**).

Annexe 1 (à rendre avec la copie)



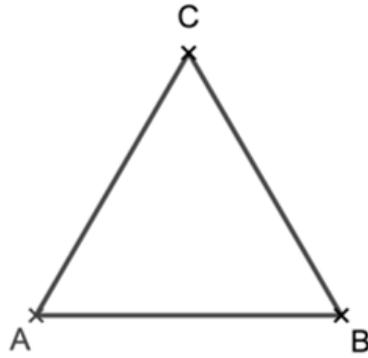
x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

Annexe 2 (à rendre avec la copie)



Ligne d'horizon

Annexe 3-A (à rendre avec la copie)



Annexe 3-B (à rendre avec la copie)

