BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2015

Epreuve : MATHÉMATIQUES

Séries : STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 4

Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice n°1 (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et la seule réponse choisie.

Dans cet exercice, i *désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\frac{\pi}{2}$.

1. Le temps d'attente en minute à un péage est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$ (exprimé en min^{-1}).
   En moyenne une personne attend à ce péage :
   - **a.** 2 min
   - **b.** 5 min
   - **c.** 10 min
   - **d.** 20 min

2. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -3 + \mathrm{i}3\sqrt{3}$ est :
   - **a.** $3e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
   - **b.** $6e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
   - **c.** $6e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
   - **d.** $-6e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

3. On considère le complexe $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
   Le nombre complexe z^2 est égal à :
   - **a.** $z^2 = 2$
   - **b.** $z^2 = 4$
   - **c.** $z^2 = -4$
   - **d.** $z^2 = -4\mathrm{i}$

Exercice n°2 (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans cet exercice, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b\ln(x) + 1$$

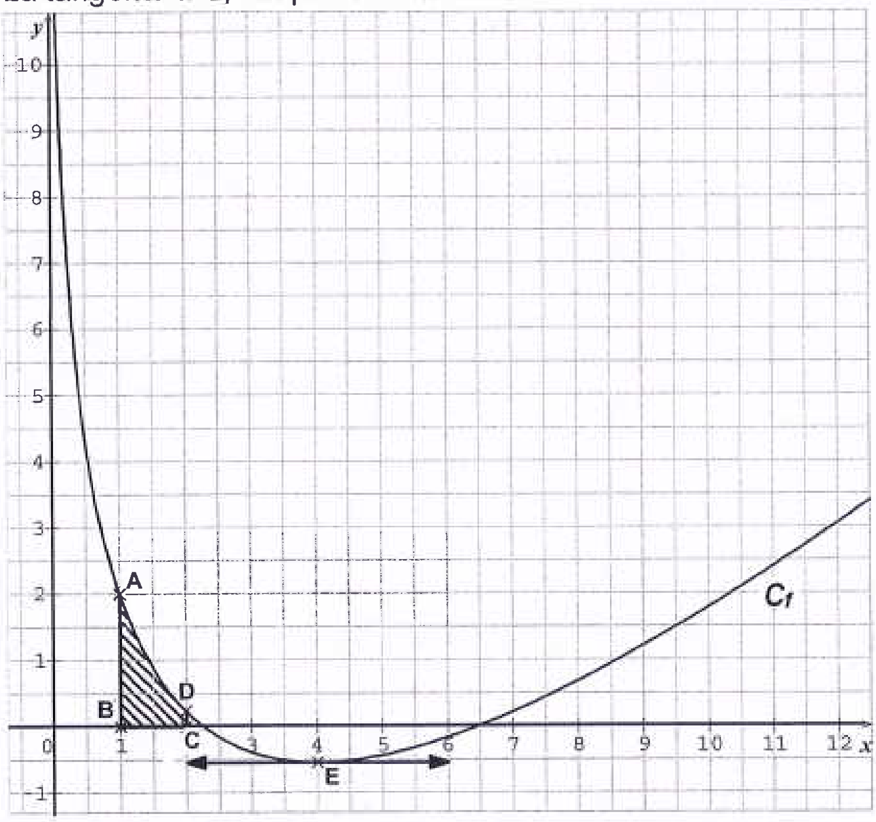
où a et b sont deux nombres réels.

$\boldsymbol{C_f}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.

Les points A et E sont deux points de la courbe $\boldsymbol{C_f}$.

Le point A a pour coordonnées (1, 2) et le point E a pour abscisse 4.

La tangente à $\boldsymbol{C_f}$ au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

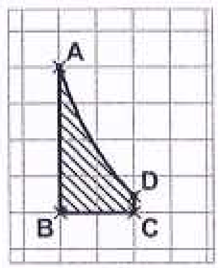
$$f(x) = x - 4\ln(x) + 1$$

1. Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$ en justifiant la réponse. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ en justifiant la réponse (on pourra factoriser l'expression de $f(x)$ par x).

3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau des variations de f.

Partie C



Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.
La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique de la page précédente.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe C_f d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives (1 , 0) et (2 , 0).

Soit la fonction G définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$G(x) = x\ln(x) - x$$

1. Calculer la dérivée G' de G.

2. En déduire une primitive F de la fonction f donnée dans la partie **B** sur $]0,+\infty[$.

3. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la pièce en unité d'aire ; puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

Exercice n°3 (4 points)

Étude de la production de plats préparés sous vide.
Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3}.

L'entreprise BUENPLATO produit en grande quantité des plats préparés sous vide.
L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité de cette production en exploitant divers outils mathématiques.

1. Sur les emballages, il est précisé que la masse des plats préparés est de 400 grammes. Un plat est conforme lorsque sa masse, exprimée en gramme, est supérieure à 394 grammes.

   On note M la variable aléatoire qui, à chaque plat prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en gramme. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale d'espérance 400 et d'écart type 5.

   a. Déterminer la probabilité qu'un plat prélevé au hasard ait une masse comprise entre 394 et 404 grammes.
   b. Déterminer la probabilité qu'un plat soit conforme.

2. Les plats préparés sont livrés à un supermarché par lot de 300.
   On arrondit la probabilité de l'événement « un plat préparé prélevé au hasard dans la production n'est pas conforme » à 0,12.
   On prélève au hasard 300 plats dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
   On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 300 plats, associe le nombre de plats préparés non conformes qu'il contient.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Calculer l'espérance mathématique E(X) et en donner une interprétation.
   c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 300 plats prélevés au hasard, au moins 280 plats soient conformes.

3. Le fabricant annonce sur les étiquettes de ses produits une proportion de produits non conformes de 12 %. On prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 1200 dans lequel 150 plats se révèlent être non conformes.

   a. Quelle est la fréquence de plats non conformes dans l'échantillon prélevé ?

   b. Déterminer l'intervalle de fluctuation avec un niveau de confiance de 95 % de la fréquence de plats non conformes dans un échantillon de taille 1200.

   Rappel : *Lorsque la proportion p dans la population est connue, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :*

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

   c. L'échantillon est-il représentatif de la production du fabricant ? Justifier.

Exercice n°4 : Étude du déficit d'une multinationale (4 points)

Le déficit d'une multinationale a été de 15 millions d'euros en 2014.
Devant l'ampleur de ce déficit, l'équipe de direction décide de prendre des mesures afin de ramener ce déficit annuel à moins de 5 millions d'euros.
Jusqu'à ce que cet objectif soit atteint, cette équipe s'engage à ce que le déficit baisse de 8,6 % tous les ans.

On définit la suite (u_n) de la manière suivante : on note u_n le déficit **en million d'euros** de cette multinationale lors de l'année $2014 + n$. Ainsi $u_0 = 15$.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. **a.** Montrer que $u_1 = 0{,}914\, u_0$.

b. Si l'équipe de direction tient ses engagements, quel sera le déficit de la multinationale en 2016 ?

c. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n.

2. **a.** Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue l'entier naturel n :

$$0{,}914^n \leq \frac{1}{3}$$

b. Quand l'engagement de l'équipe de direction, à savoir ramener le déficit de la multinationale au-dessous des 5 millions d'euros, sera-t-il atteint ?

3. On considère l'algorithme ci-dessous qui permet de retrouver le résultat de la question précédente.

```
Variables
    N un entier naturel
    Q et U deux nombres réels.
Début
    N prend la valeur 0
    Q prend la valeur 0,914
    U prend la valeur 15
    Tant que ... faire
        | N prend la valeur ...
        | U prend la valeur ...
    Fin Tant que
    Afficher ...
Fin
```

a. Recopier et compléter les lignes en pointillé afin que l'algorithme renvoie l'année à partir de laquelle le déficit de cette multinationale sera ramené en dessous de 5 millions d'euros.

b. On suppose l'algorithme complété.
Proposer une modification de l'algorithme afin que celui-ci affiche le montant du déficit de cette multinationale **chaque année** jusqu'à ce que celui-ci soit ramené au-dessous de 5 millions d'euros.

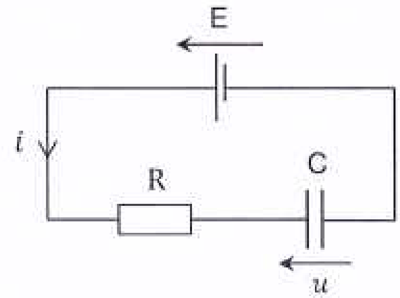
4. **a.** Calculer la somme des déficits sur onze ans à partir de l'année 2014 comprise, c'est-à-dire : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

b. Construire un algorithme qui donne cette somme en sortie.

Exercice n°5 (4 points)

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

- une source de tension continue E de 10 V.
- une résistance R de $10^5\ \Omega$.
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.



On note u la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t exprimé en seconde.

La fonction u est définie et dérivable sur [0,+∞[; elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\mathrm{RC}u' + u = \mathrm{E}$$

où u' est la fonction dérivée de u.

1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à :

$$u' + 10u = 100$$

2. **a.** Déterminer la forme générale $u(t)$ des solutions de cette équation différentielle.

b. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u tel que $u(0) = 0$.

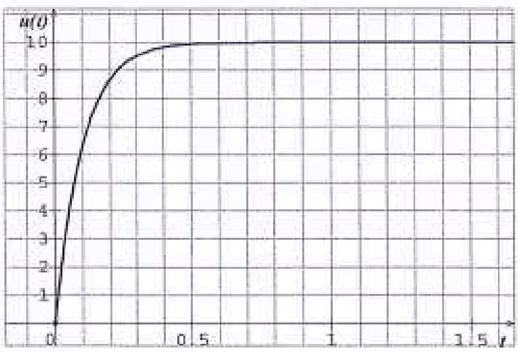
c. Déterminer en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u ainsi obtenue. En donner une interprétation.

3. On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction u qui vient d'être obtenue à la question **2.b.** avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.
On appelle T le temps de charge en seconde pour que u(T) soit égal à 95% de E.

a. Déterminer graphiquement le temps de charge T.

b. Retrouver, par le calcul, le résultat précédent.

Charge du condensateur en fonction du temps.



4. Sans modifier les valeurs respectives de E et de C, déterminer la valeur de R afin que le temps de charge T soit multiplié par 2.