**Durée : 4 heures**

# ∾ Baccalauréat STI 2D/STL spécialité SPCL ∾
# Métropole–La Réunion 7 septembre 2015

**EXERCICE 1** **4 points**

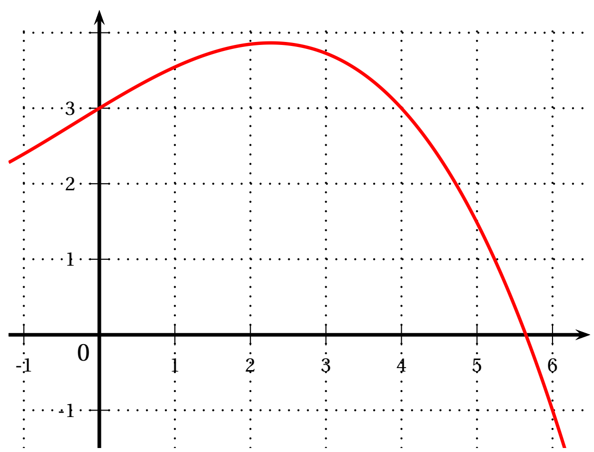
*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.*

**Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.**

**1.** On considère le nombre complexe $z = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$. Le nombre complexe conjugué de $z$ est égal à :

**a.** $\overline{z} = -3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ **b.** $\overline{z} = 3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ **c.** $\overline{z} = -3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ **d.** $\overline{z} = 33\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

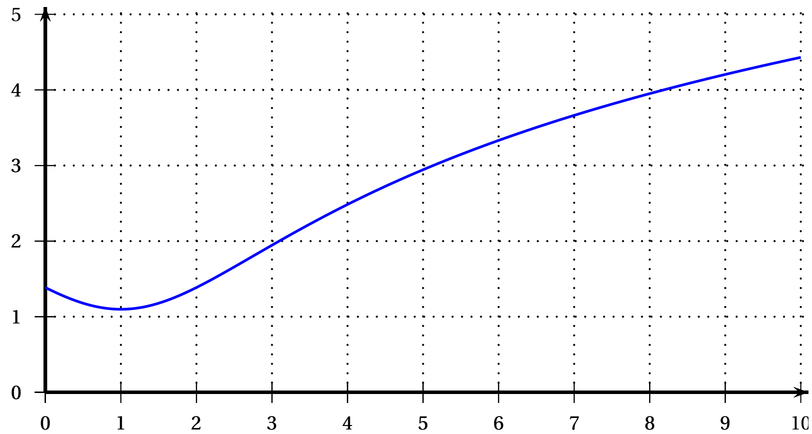
**2.** La figure ci-dessous donne la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. En notant $I$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\text{d}x$, on a alors, en unités d'aire :




**a.** $1 < I < 3$ **b.** $0 < I < 9$ **c.** $9 < I < 12$ **d.** $12 < I < 22$

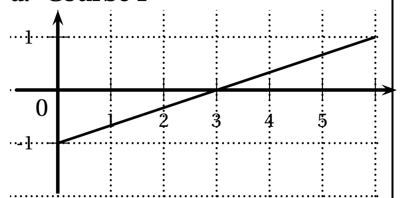
**3.** La figure ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 4\right).$$

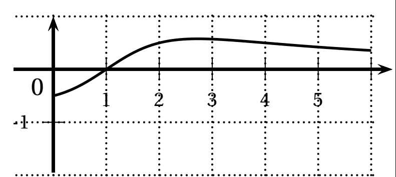


4. La courbe de la fonction dérivée de la fonction $g$ est :

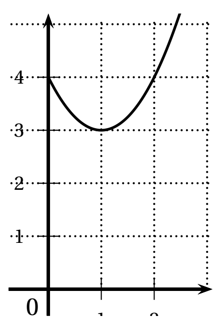
**a. Courbe 1**



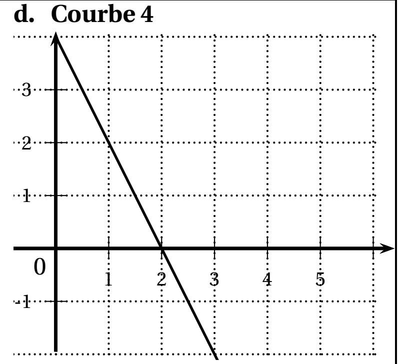
**b. Courbe 2**



**c. Courbe 3**



**d. Courbe 4**



5. La variable $X$ suit la loi normale d'espérance 3 et d'écart type 6.
La probabilité $P(X < 3)$ vaut :

**a.** 3 **b.** 0,5 **c.** 0 **d.** 0,997

**EXERCICE 2** **6 points**

*Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à* $10^{-2}$ *près.*

Un smartphone est équipé d'une batterie Li-ion qui débite en usage normal un courant d'intensité moyenne $I$ de 0,03 ampère (A).
La capacité $C$ de cette batterie, exprimée en ampères-heures (Ah), est la quantité maximale d'électricité qu'elle peut emmagasiner.
On dit que la batterie a effectué un cycle de charge lorsque la quantité d'électricité absorbée, éventuellement en plusieurs fois, est égale à sa capacité.
Lors des 300 premiers cycles de charge de la batterie, sa capacité reste égale à 1,8 Ah.

1. L'autonomie $T$ de ce smartphone, en heures, est fonction de la capacité $C$ de sa batterie et de l'intensité moyenne $I$ du courant qu'elle débite en usage normal.
On estime que $T = 0,7 \times \dfrac{C}{I}$.

Calculer l'autonomie $T$, en heures, de ce smartphone au cours de l'un des 300 premiers cycles de charge.

**2.** On considère qu'après 300 cycles de charge, l'autonomie de la batterie diminue de 1 % à chaque nouveau cycle de charge.

Pour tout entier naturel $n$, on note $T_n$ l'autonomie, en heures, de la batterie au bout de « $300 + n$ » cycles de charge.

On admet que $T_0 = 42$.

**a.** Calculer $T_1$ et $T_2$. Interpréter les résultats.

**b.** Exprimer $T_{n+1}$ en fonction de $T_n$ ;

**c.** Justifier que $T_n = 42 \times 0,99^n$.

**3.** Un utilisateur souhaite déterminer à partir de combien de cycles de charge l'autonomie de la batterie aura diminué de moitié par rapport à son état initial.

**a.** On propose l'algorithme suivant pour déterminer le nombre de cycles de charge correspondant.

```
Variables
    n : nombre entier naturel
    T : nombre réel
    q : nombre réel
Initialisation
    n prend la valeur 0
    T prend la valeur 42
    q prend la valeur 0,99
Traitement
    Tant que ......
        T prend la valeur ......
        n prend la valeur ......
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher n + 300
```

Recopier et compléter la partie relative au traitement.

**b.** Déterminer à partir de combien de cycles de charge l'autonomie de la batterie aura diminué de moitié par rapport à son état initial.

**4.** Lorsque l'autonomie de la batterie devient inférieure à 5 heures, on estime qu'elle ne permet plus un usage normal du smartphone. Le nombre de cycles de charge correspondant est alors appelé durée de vie de la batterie. Déterminer la durée de vie de cette batterie.

## EXERCICE 3 — 6 points

« Avec une centaine de décès en moyenne par an, le monoxyde de carbone (CO) est la première cause de mortalité accidentelle par intoxication en France. [...] Pourtant certains symptômes annonciateurs d'une intoxication au monoxyde de carbone existent. Maux de tête, nausées et vomissements sont notamment les premiers signes qui doivent alerter. Bien identifiés, ils permettent de réagir rapidement et d'éviter le pire. »

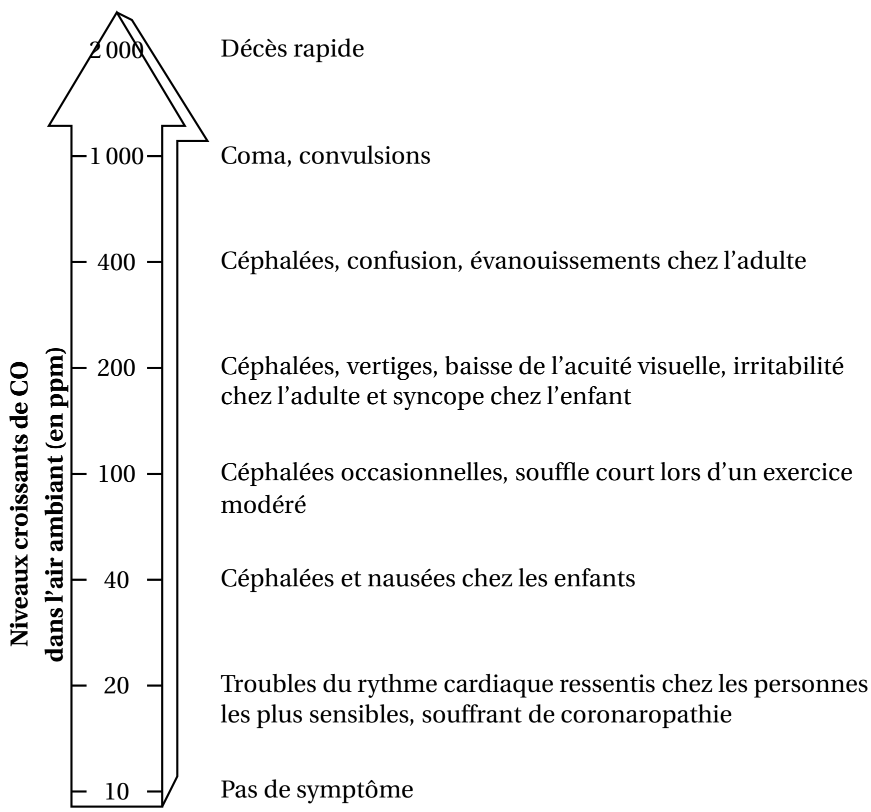
Source Ministère des Affaires Sociales et de la Santé. (octobre 2012)

**Document 1**

La société COalerte fabrique un modèle de détecteurs qui enregistre en temps réel la concentration de monoxyde de carbone en parties par million (ppm).
Un tel détecteur produit un signal d'alarme respectant les modalités fixées par la norme européenne EN 50 291 ci-dessous.
Il déclenche un signal d'alarme :

- si la concentration est supérieure à 30 ppm pendant au moins 120 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 50 ppm pendant au moins 60 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 100 ppm pendant au moins la minutes ;
- si la concentration est supérieure à 300 ppm pendant au moins 3 minutes.

**Document 2**
**Symptômes et effets sur la santé du monoxyde de carbone**

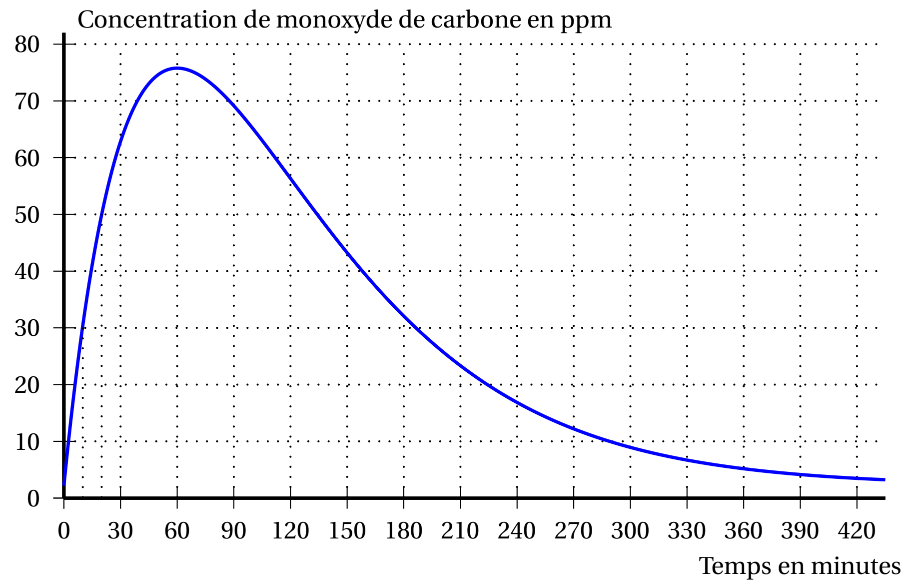



Source : Commission européenne 2014.

Un laboratoire d'essais procède à des tests sur un détecteur produit par la société COalerte en simulant un accident qui provoque une concentration anormale de monoxyde de carbone dans une pièce.

**Partie A**

Le laboratoire relève la concentration de monoxyde de carbone en fonction du temps, exprimé en heures. Les enregistrements effectués sur une période de 8 heures se traduisent par la représentation graphique ci-dessous.




**1.** Estimer au bout de combien de temps devrait retentir un signal d'alarme.

**2.** Une personne présente dans la pièce depuis le début d'un tel accident risquerait-elle de présenter des symptômes ? Si oui, lesquels ?

**Partie B**

Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis à $10^{-2}$ près.
La concentration de monoxyde de carbone exprimée en ppm dans la pièce en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisée par la fonction $f$ définie sur $[0 ; 8]$ par

$$f(t) = 2,2 + 200t\mathrm{e}^{-t}.$$

**1.** Calculer la concentration de monoxyde de carbone en ppm dans la pièce :

**a.** au moment de l'accident ;

**b.** 30 minutes après.

**2.** À l'aide du graphique de la partie A, conjecturer les variations de la concentration de monoxyde de carbone dans la pièce en fonction du temps.

**3.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

**a.** Montrer que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0 ; 8]$, $f'(t) = 200(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.

**b.** Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

**c.** Valider ou invalider la conjecture émise à la question 2.

**4.** On note $F$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 8]$ par

$$F(t) = 2,2t - 200(t+1)\mathrm{e}^{-t}.$$

On admet que $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

**a.** On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ est le nombre réel défini par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer la valeur moyenne de la concentration de monoxyde de carbone lors des 8 heures qui ont suivi l'accident.

**b.** Pour des raisons de sécurité, le ministère du travail fixe un seuil pour la concentration moyenne de monoxyde de carbone. Ce seuil est de 50 ppm pour une période de 8 heures.

La sécurité des personnes présentes dans la pièce aurait-elle été remise en cause lors de l'accident simulé ?

## EXERCICE 4 — 4 points

Un sismologue déclare en janvier 2014 : « Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les vingt prochaines années est supérieur à 70 % ».

On s'intéresse au temps, exprimé en années, écoulé entre deux séismes majeurs le long de cette faille en Californie. On admet que ce temps est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

**Document 1**

La faille de San Andreas, en Californie : séismes majeurs de magnitude supérieure ou égale à 5.

| Ville | Année | Magnitude |
|---|---|---|
| Comté d'Orange | 1769 | 6 |
| San Diego | 1800 | 6,5 |
| San Francisco | 1808 | 6 |
| Fort Tejon | 1857 | 8,3 |
| Monts Santa Cruz | 1865 | 6,5 |
| Hayward | 1868 | 6,9 |
| San Francisco | 1906 | 8,2 |
| Santa Barbara | 1925 | 6,3 |
| Santa Barbara | 1927 | 7,3 |
| Long Beach | 1933 | 6,3 |
| Comté de Kern | 1952 | 7,7 |
| San Francisco | 1957 | 5,3 |
| San Fernando | 1971 | 6,6 |
| LomaPrieta | 1989 | 7,1 |
| Parkfield | 2004 | 6,0 |
| Los Angeles | 2008 | 5,5 |
| Mexicali | 2010 | 7,2 |
| Napa | 2014 | 6,0 |

**Document 2**

**Rappels sur la loi exponentielle**

- $\lambda$ est un nombre réel strictement positif.

Une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si sa densité de probabilité est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

- L'espérance d'une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

**1.** Pour illustrer la situation un élève utilise un tableur.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Année | 1769 | 1800 | 1808 | 1857 | 1865 | 1868 | 1906 | 1925 | 1927 | 1933 | 1952 | 1957 | 1971 | 1989 | 2004 | 2008 | 2010 | 2014 | Total |
| 2 | | | 31 | 8 | 49 | 8 | 3 | 38 | 19 | 2 | 6 | 19 | 5 | 14 | 18 | 15 | 4 | 2 | 4 | 245 |

**a.** Proposer un titre pour la cellule A2 grisée.

**b.** Quelle formule a saisi l'élève dans la cellule C2 afin de compléter ce tableau jusqu'à la colonne S par « recopie automatique vers la droite » ?

**2.** **a.** Calculer en années la moyenne $m$, arrondie à $10^{-2}$ près, du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie.

**b.** Justifier qu'une approximation du paramètre $\lambda$ de la loi exponentielle suivie par la variable aléatoire $X$ est 0,069 4.

**3.** **a.** Calculer $P(X \leqslant 20)$ à $10^{-2}$ près.

**b.** L'affirmation du sismologue paraît-elle cohérente avec cette modélisation par une loi exponentielle ?

**4.** Le dernier séisme majeur a eu lieu en 2014 à Napa. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres séismes majeurs le long de la faille de San Andreas, en Californie, avant 2050. On arrondira à $10^{-2}$ près.

**5.** **a.** Résoudre l'équation $1 - \mathrm{e}^{-0,0694t} = 0,95$.

**b.** Interpréter ce résultat.