Durée : 4 heures

Baccalauréat STI 2D/STL
Nouvelle-Calédonie 17 novembre 2014

Exercice 1 **6 points**

Au 1er janvier 2014, un particulier installe 20 m^2 de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il utilise la documentation suivante :

En France 1 m^2 de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 95 kWh/an. La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an. La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014 + n$.

Partie A

1. **a.** Déterminer la quantité d'énergie produite en 2014 et la quantité d'énergie produite en 2015.

   b. Vérifier que $u_{n+1} = 0,97 \times u_n$ pour tout entier naturel n.
2. Quelle estimation, à la dizaine de kWh près, peut-on donner de la quantité d'énergie produite en 2044 ?
3. Que devient la quantité d'énergie produite annuellement au bout d'un grand nombre d'années ?
4. En quelle année l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement ?

Partie B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
VARIABLES
u EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
n PREND_LA_VALEUR 0
u PREND LA VALEUR 1 900
S PREND LA VALEUR 1 900
TANT_QUE (S < 20000) FAIRE
DÉBUT_TANT_QUE
n PREND LA VALEUR n + 1
u PREND_LA_VALEUR u × 0,97
S PREND_LA_VALEUR S + u
FIN_TANT_QUE
AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

1. **a.** À quoi sert la ligne 8 ?
   b. La valeur affichée en exécutant cet algorithme est 12. Que signifie ce résultat ?
2. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.
   Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24}$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 2 **5 points**

Un grand constructeur automobile propose une nouvelle gamme de véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium.

Partie A

On s'intéresse à l'autonomie en kilomètres de cette nouvelle gamme de véhicules.
Soit X la variable aléatoire qui à un véhicule tiré au hasard associe son autonomie en km.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.
On considère qu'un véhicule est conforme lorsque son autonomie est comprise entre 92 et 116.
Déterminer la probabilité que le véhicule soit déclaré conforme.

Partie B

Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir leur certificat de conformité.
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules choisis au hasard dans la production associe le nombre de véhicules non-conformes dans cet échantillon.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.
On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non-conforme est $0,05$.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « dans l'échantillon prélevé au hasard, tous les véhicules sont conformes ». On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

Partie C

Le constructeur automobile veut juger de l'impact d'une campagne publicitaire menée dans les médias pour la vente de cette nouvelle gamme de véhicules.
Dans un échantillon, considéré comme prélevé au hasard et avec remise, de 1 000 véhicules produits, on constate la vente de 148 véhicules avant la campagne publicitaire.
Sur une même période, après la campagne publicitaire, pour un échantillon de même taille et prélevé dans les mêmes conditions, on constate la vente de 177 véhicules.
Que peut-on en conclure sur la campagne publicitaire ?
Vous pourrez déterminer les intervalles de confiance avec un niveau de confiance de 95 % correspondant à chacune de ces situations.

EXERCICE 3 **4 points**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est attendue. Une bonne réponse apporte 1 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de points.
Dans les questions 1. et 2. on considère la fonction f définie sur $]7\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x^2 + x + \frac{1}{(x-7)^2}$$

1. Une primitive F de f est donnée par :

a. $F(x) = 6x + 1 + \dfrac{2}{(x-7)^3}$

b. $F(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{(x-7)}$

c. $F(x) = 9x^3 + 2x^2 + \dfrac{1}{(x-7)}$

d. $F(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + \ln(x-7)$

2. Laquelle des limites suivantes est correcte ?

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} f(x) = +\infty$

d. $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} f(x) = 154$

3. Soit $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors l'écriture exponentielle du conjugué de z est :

a. $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

b. $\overline{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

c. $\overline{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

d. $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

4. Un argument de $z = \sqrt{7}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{7}}$ est :

a. $\dfrac{\pi}{14}$

b. $\dfrac{13\pi}{14}$

c. $-\dfrac{2\pi}{9}$

d. $\sqrt{7}$

EXERCICE 4 **5 points**

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau potable.
À la suite d'un incident de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à la salinité de cette eau, c'est-à-dire au taux de sel (en grammes par litre), qui doit rester inférieure à 3,9 g.L^{-1}.
On modélise la situation en notant s la salinité exprimée en grammes par litre et t le temps écoulé en minutes depuis le début de l'incident.
On suppose que l'évolution de s est représentée par l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + 0,01y = 0,39.$$

1. Résoudre l'équation (E).

On admet pour la suite qu'en considérant les conditions initiales, la fonction s est définie par

$$s(t) = 39 - 38,88\mathrm{e}^{-0,01t}.$$

2. **a.** Quelle est la salinité de l'eau dans le réservoir avant l'incident c'est-à-dire à $t = 0$?

   b. Justifier que la fonction s est strictement croissante.

   c. Déterminer la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2} près.

   d. Que devient la salinité de l'eau du réservoir si on n'intervient jamais ?

3. La salinité doit rester inférieure à 3,9 g.L^{-1}.

   De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident ?

   Justifier la réponse.