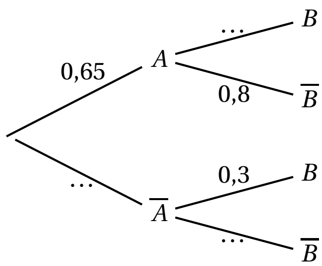
∽ Baccalauréat STMG Métropole ∽
septembre 2016

EXERCICE 1 **4 points**

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E, $p(E)$ la probabilité de l'évènement E, et, si F est un évènement de probabilité non nulle, $P_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère l'arbre de probabilité ci-contre.



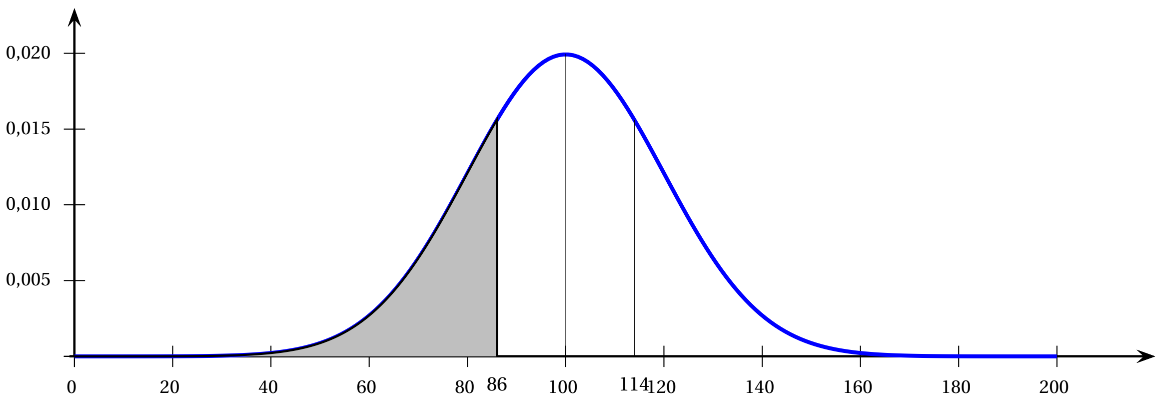
Affirmation 1 : La probabilité conditionnelle de B sachant A est égale à 0,2

Affirmation 2 : La probabilité de B est égale à 0,5.

2. Un institut de sondage affirme que 56 % des Français écoutent de la musique classique, au moins de temps en temps. On interroge 200 Français, et parmi eux 140 déclarent écouter de la musique classique de temps en temps.

   Affirmation 3 : On peut rejeter, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, le résultat donné par l'institut de sondage.

3. La courbe de densité d'une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 20$ est donnée ci-dessous. La valeur de l'aire de la surface grisée est de 0,242.



Affirmation 4 : La probabilité que X soit comprise entre 86 et 114 est égale à 0,758.

EXERCICE 2 **5 points**

Les grands-parents d'Inès décident de lui ouvrir un compte épargne le 1er janvier 2016.
Une première banque leur propose un taux annuel de 1,5 %, à intérêts composés, pour un dépôt initial de 2 000 €. On rappelle qu'un capital produit des intérêts composés si, à la fin de chaque année, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.
Pour tout entier n, on note u_n le capital, exprimé en euro, disponible le 1er janvier de l'année $2016 + n$.
Ainsi $u_0 = 2000$.

1. Vérifier que $u_1 = 2030$ et donner la valeur de u_2.
2. **a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Préciser la nature de la suite (u_n).
   c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. On considère l'algorithme ci–dessous :

Variables	k est un nombre entier u est un nombre réel
Initialisation	k prend la valeur 0 u prend la valeur 2 000
Traitement	Tant que $u < 2250$ Faire u prend la valeur $u \times 1,015$ k prend la valeur $k+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher k

a. À quoi correspond la valeur en sortie de cet algorithme ?

b. À l'aide de la calculatrice, donner cette valeur.

4. Une autre banque propose aux grands parents d'Inès 32 € d'intérêts simples annuels pour un dépôt initial de 2 000 €. On rappelle qu'un capital produit des intérêts simples si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital.

Pendant combien d'années, à partir de 2016, ce nouveau placement est-il plus avantageux que le précédent ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 **5 points**

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne l'évolution de la population française, de 2006 à 2014.
La ligne 4 est au format pourcentage.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
2	Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	Population (en millier) : y_i	63 186	63 601	63 962	64 305	64 613	64 933	65 241	65 921	
4	Taux d'évolution entre deux années consécutives (en pourcentage)		0,66 %		0,54 %	0,48 %	0,50 %	0,47 %	1,04 %	0,42 %

Sources : INSEE et banque mondiale

Le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ pour i variant de 0 à 8, est donné en **annexe 1, à rendre avec la copie**.

Partie A

1. Donner une formule qui, entrée en cellule C4, permet par recopie vers la droite d'obtenir les taux d'évolution annuels successifs jusqu'en 2014.

2. Donner les valeurs contenues dans les cellules D4 et J3.

3. Calculer le taux d'évolution moyen annuel entre 2006 et 2014 de la population française. On exprimera le résultat en pourcentage (arrondi à 0,01 %).

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au dixième.

2. Pour estimer la population française dans les années à venir, on décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 370x + 63\,183$.

   Tracer cette droite sur le graphique figurant en **annexe 1**.

3. Par lecture graphique, donner une estimation de la population française en 2020. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique de l'**annexe 1**.

4. Selon une étude, la population française dépassera les 70 millions en 2030. Que peut-on penser de cette estimation ?

EXERCICE 4 **6 points**

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.
Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par :

$$C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45.$$

L'entreprise fixe le prix de vente d'une tonne de peinture à 670 €.

Partie A

On a représenté, dans l'**annexe 2**, la courbe Γ représentant le coût de production dans un repère orthogonal du plan.

1. Donner le coût correspondant à une fabrication quotidienne de 9,5 tonnes de peinture.

2. Déterminer la production quotidienne correspondant à un coût de fabrication de 16 000 €.

3. **a.** Construire, dans le repère de l'**annexe 2**, la courbe représentant la recette correspondant à la vente de x tonnes de peinture, pour $x \in [1\,;\,20]$.

   b. Donner par lecture graphique, l'ensemble des valeurs de la production quotidienne pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

Partie B

Pour une production de x tonnes de peinture, on appelle coût unitaire, le coût $f(x)$, auquel revient alors la production d'une tonne de peinture.

1. Sachant que, pour tout $x \in [1\,;\,20]$, $f(x) = \frac{C(x)}{x}$, vérifier que

$$f(x) = 0,05x - 0,1 + \frac{2,45}{x}$$

2. On note f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ puis démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,20]$,

$$f'(x) = \frac{0,05(x^2 - 49)}{x^2}$$

3. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in [1\,;\,20]$ et dresser le tableau de variation de f.

4. **a.** Préciser la quantité de peinture que doit produire l'entreprise pour que le coût unitaire soit minimal.

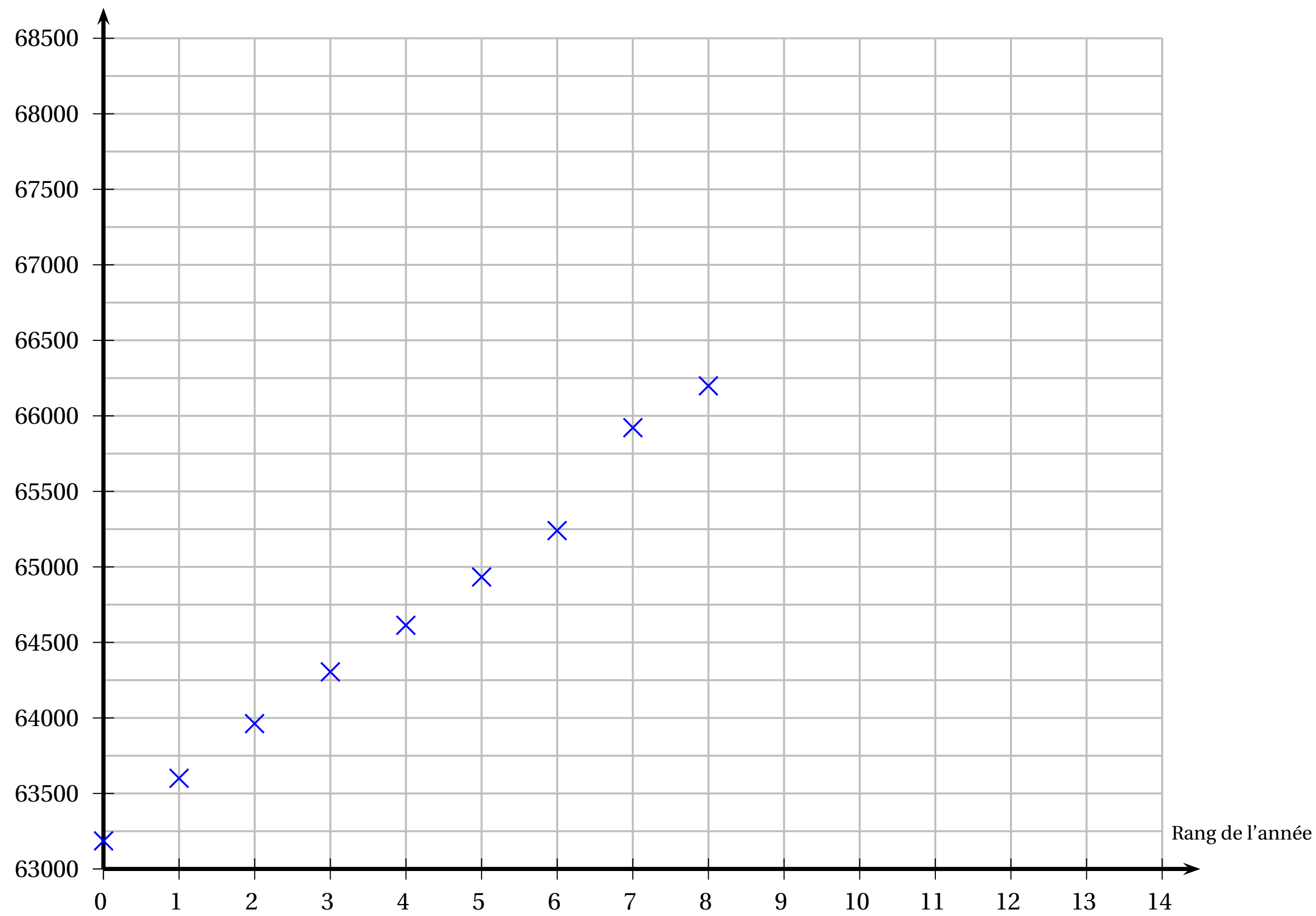
   b. Quel est ce coût unitaire minimal ?

   c. Quel est alors le bénéfice réalisé par l'entreprise ?

5. La valeur trouvée à la question **4. c.** est-elle le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser ? Justifier la réponse.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 - Partie B



Annexe 2 (à rendre avec la copie)